



**Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik**

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule
Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

**Arbeits- und Informationsblätter
zum Fach Mathematik
in der Berufsoberschule
13. Klasse (Teil 4)**

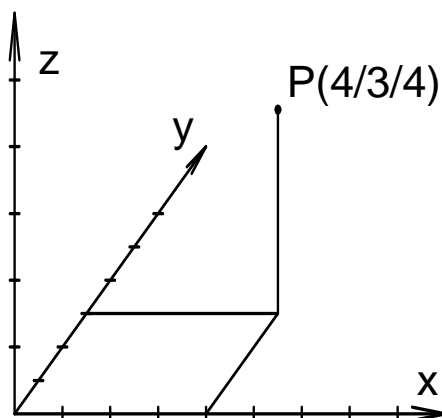
Lehnen

Stand 6.2010

Analytische Geometrie

Thema: Vektorrechnung

1. Kartesische Koordinatensysteme:



2. **Der Abstand zweier Punkte im Raum:** $P(p_1/p_2/p_3)$ und $Q(q_1/q_2/q_3)$ seien beliebige Punkte im Raum. Dann gilt für ihren Abstand:

$$|PQ| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

3. **Vektoren als Pfeilklassen:** Eine Verschiebung, die alle Punkte des Raumes (der Ebene) in die gleiche Richtung um den gleichen Betrag verschiebt, bezeichnet man als Vektor \vec{v} . Ein Vektor \vec{v} lässt sich als Klasse von gleichgerichteten, gleichorientierten und gleichlangen Pfeilen auffassen. Vektoren werden in Spaltenschreibweise dargestellt.

$$\text{Raum: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{Ebene: } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. **Nullvektoren/Einheitsvektoren:** Als Nullvektor $\vec{0}$ bezeichnet man denjenigen Vektor, der jeden Punkt des Raumes (der Ebene) in sich selbst verschiebt.

$$\text{Raum: } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Ebene: } \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

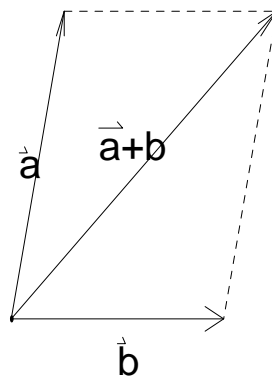
Den Verschiebungspfeilen des Nullvektors lässt sich wohl die Länge 0, aber keine bestimmte Richtung zuordnen. Ein Vektor, dessen Verschiebungspfeile die Länge 1 besitzen, wird als Einheitsvektor bezeichnet.

5. **Der Betrag eines Vektors:** Als Betrag $|\vec{v}|$ eines Vektors \vec{v} bezeichnet man die Länge der zugehörigen Verschiebungspfeile.

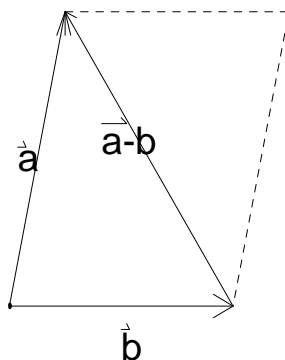
$$\text{Raum: } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$\text{Ebene: } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

6. **Die Summe zweier Vektoren:** Führt man die zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} entsprechenden Verschiebungen hintereinander aus, so erhält man eine Gesamtverschiebung. Den Vektor, dem diese Verschiebung zugeordnet ist, bezeichnet man als Summe $\vec{a} + \vec{b}$ von \vec{a} und \vec{b} . Geometrisch anschaulich kann $\vec{a} + \vec{b}$ nach der abgebildeten Parallelogrammregel konstruiert werden.



7. **Die Differenz zweier Vektoren:** Als Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} bezeichnet man die Summe des Vektors \vec{a} und des Gegenvektors von \vec{b} : $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Geometrisch anschaulich kann man die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ nach der abgebildeten Parallelogrammregel konstruieren.



8. **Der Gegenvektor eines Vektors:** Der Gegenvektor des Vektors \vec{a} wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet. Der Gegenvektor wird auch als inverses Element bezeichnet. Schreibweise: $\vec{a} : -\vec{a}$.
9. **Rechnen mit Vektoren:** Mit Vektoren kann man algebraisch rechnen. Man kann Vektoren addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Für Spaltenvektoren gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

$$r\vec{a} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

10. Rechengesetze für Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

$$r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$$

$$r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$$

$$(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$$

11. Linearkombination von Vektoren: $\vec{v} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \dots + r_n\vec{a}_n$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ bezeichnet.

Vektorrechnung

1 Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.1 Zeichne die Repräsentanten der Vektoren.

1.2 Berechne die Vektorterme $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.3 Berechne die Beträge der Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .

2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

2.1 Überprüfe die beiden Vektoren auf Kollinearität.

3 Gegeben sind die Punkte $P(1;2;3)$ und $Q(4;5;6)$.

3.1 Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q . Überprüfe, ob der Punkt $R(2;3;4)$ auf der Geraden liegt.

4 Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt hat den Radius 7.

4.1 Liegt der Punkt $N(3;6)$ innerhalb, auf oder außerhalb des Kreises?

5 Erläutere die Begriffe Tangente, Sekante und Passante anhand einer Skizze. Welchen Anforderungen müssen jeweils die vektorielle Geradengleichung bzw. vektorielle Kreisgleichung erfüllen.

Vektorrechnung

1. Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- 1.1 Zeichnen Sie die Repräsentanten der Vektoren.
- 1.2 Berechnen Sie die Vektorterme $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- 1.3 Berechnen Sie die Beträge der Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} .
2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \end{pmatrix}$.
- 2.1 Überprüfen Sie die beiden Vektoren auf Kollinearität.
3. Gegeben sind die Punkte $P(1;2;3)$ und $Q(4;5;6)$.
- 3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q . Überprüfen Sie, ob der Punkt $R(2;3;4)$ auf der Geraden liegt.
4. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt hat den Radius 7.
- 4.1 Liegt der Punkt $N(3;6)$ innerhalb, auf oder außerhalb des Kreises?
5. Erläutern Sie die Begriffe Tangente, Sekante und Passante anhand einer Skizze. Welchen Anforderungen müssen jeweils die vektorielle Geradengleichung bzw. vektorielle Kreisgleichung erfüllen.
6. Gegeben ist die Gerade g mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 6.1 Überprüfen Sie, ob der Punkt $A(2;5)$ auf der Geraden liegt.
- 6.2 Überprüfen Sie, ob der Punkt $B(-7;-5;8)$ auf der Geraden f :
 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt.
7. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(1;2;1)$ und $P_2(0;5;-1)$. Durch Vertauschen der Punkte erhält man eine andere Gleichung. Klären Sie, ob es sich hierbei um dieselbe Gerade handelt.

Übungen Vektorrechnung

1. Gegeben ist die Gerade g mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1.1 Überprüfen Sie, ob der Punkt A(2;5) auf der Geraden liegt.

1.2 Überprüfen Sie, ob der Punkt B(-7;-5;8) auf der Geraden f: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt.

2. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(1;2;1)$ und $P_2(0;5;-1)$.

3. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt hat den Radius 6.

3.1 Liegt der Punkt $N(3;6)$ innerhalb, auf oder außerhalb des Kreises?

4. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3|2,4|-1)$; $\vec{b} = (-1|0|3,6)$; $\vec{c} = (14|9,6|-11,2)$.

Überprüfen Sie, ob die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} komplanar zueinander sind (auf einer Ebene liegen).

5. Bestimmen Sie drei Vektoren, die parallel zueinander stehen.

6. Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Überprüfen Sie die Vektoren $\vec{a} = (3,2|-1,75)$ und $\vec{b} = (-10|5,65)$ auf Kollinearität.

Prüfungsvorbereitung

- 1) Führen Sie für die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$ eine Kurvendiskussion durch.
Ermitteln Sie

- das Verhalten des Graphen von f im Unendlichen,
- die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
- die Extrempunkte und
- die Wende- bzw. Sattelpunkte.
- Handelt es sich um eine symmetrische Funktion? (Begründung)
- Zeichnen Sie den Graphen.

- 2) Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
Bestimmen Sie:

- das Verhalten des Graphen von f im Unendlichen,
- die Nullstellen,
- die Extrema mit Minimum/Maximum-Entscheidung und
- die Wende- bzw. Sattelpunkte.
- Erstellen Sie eine Skizze von dem Graphen.

- 3) Führen Sie die Kurvendiskussion der Funktion f mit $f(x) = \frac{9}{64}x^4 - \frac{15}{16}x^3$ durch.

Bestimmen Sie

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen,
- die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse,
- die Extrema und
- die Wende- bzw. Sattelpunkte.
- Stellen Sie die angegebene Funktion mit allen ermittelten Punkten graphisch dar.

- 4) Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Punkt $P(0 | 0)$ einen Extrempunkt hat und an der Wendestelle $x_w = -1$ die Wendetangente $y = -x - \frac{1}{3}$ anliegt.

- 5) Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{1 - x}$

Ermitteln Sie

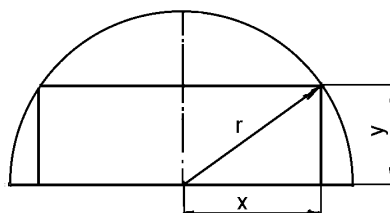
- das Verhalten des Graphen der Funktion f im Unendlichen sowie die Asymptoten,
- die Koordinaten der Nullstellen,
- die Polstellen,
- die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung und
- den Definitions- und Wertebereich.
- Fertigen Sie eine Skizze vom Graphen der Funktion f an.

- 6) Für die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 1}$ sind zu berechnen:

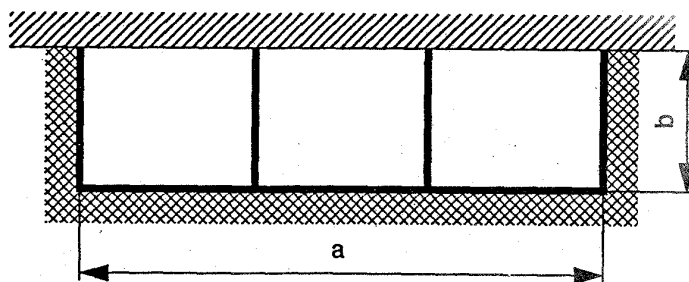
- das Verhalten des Graphen im Unendlichen, sowie die Asymptoten,
- die Koordinaten der Nullpunkte,
- die Pole,
- die Extrema (auf die 2. Ableitung wird verzichtet).
- Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit Asymptoten und Polstellen.

- 7) Der Graph einer Funktion 3. Ordnung hat seinen Wendepunkt in $W(0 | 1)$ und im Punkt $P(-2 | 3)$ eine horizontale Tangente. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

- 8) In einem halbkreisförmigen Bogen mit einem Radius von $r = 4$ m soll ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fensterfläche eingesetzt werden. Bestimmen Sie die Breite x , die Höhe y und den maximalen Fensterflächeninhalt.



- 9) Für eine Neubausiedlung sollen Wasser-, Abwasser- und Telekomschacht in einem Dreikammerkanal zusammengefasst werden. Der Gesamtflächeninhalt des Querschnitts soll 4 m^2 betragen. Wie groß müssen die Länge a und die Breite b gewählt werden, damit der Materialverbrauch minimal ist?



- 10) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion, die bei $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und ihr Graph im Wendepunkt $W(4 | -\frac{4}{3})$ den Anstieg $m = 1$ hat.

- 11) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x - 1}$

sind zu bestimmen:

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
- die Koordinaten der Nullstellen,
- die Polstellen und Lücken,
- die Extrempunkte und
- Wendepunkte.
- Skizzieren Sie die Funktion.

- 12) Ein Flugzeug wird durch die Schubkraft $F_s = 4,8 \text{ kN}$ in konstanter Flughöhe geradlinig angetrieben. Der Wind übt eine gleichbleibende Kraft $F_w = 3 \text{ kN}$ in einem Winkel von etwa 70° zur Flugrichtung aus.

- Welche Kraft wirkt insgesamt auf das Flugzeug?
- Unter welchem Winkel zur gewünschten Flugroute muss Kurs gehalten werden, um an den Zielort zu gelangen?

Lösen Sie die Aufgabe graphisch und rechnerisch (algebraisch).

13) Welches gleichschenklige Dreieck mit gegebenem Schenkel $a = 10$ cm hat den größten Flächeninhalt (auf die Minimum/Maximum-Entscheidung wird verzichtet)? Fertigen Sie eine Skizze an.

14) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Bestimmen Sie den Punkt $P(a | f(a))$ auf der Parabel so, dass der Inhalt der gekennzeichneten Fläche $A = 4$ FE beträgt.

15) Von einer Radarstation werden zwei Flugzeuge geortet. Im rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem $\{0; i; j; k\}$, in dessen Ursprung die Radarstation liegt, haben die Flugzeuge die Koordinaten $P_1 (10|4|1)$ und $P_2 (13|16|5)$. Beide Flugzeuge fliegen auf den Punkt $P_3 (22|8|5)$ zu (Angabe der Koordinaten in km).

- Berechnen Sie den Abstand der Flugzeuge voneinander zum Zeitpunkt der Ortung.
- Berechnen Sie den Winkel, der von den beiden als geradlinig angenommenen Flugkurven gebildet wird.

16) Die Punkte $A (1|0|2)$, $B (6|0|2)$ und $C (6|4|-1)$ sind Punkte eines Dreiecks. Sie werden durch den Punkt D zu einem Rechteck ergänzt.

Berechnen Sie:

- die Koordinaten des Punktes D
- die Längen der Mittelsenkrechten des Rechtecks und
- den Mittelpunkt.
- Welche Form hat das Rechteck?

17) Ein Transportcontainer hat die Maße $2,5$ m x $1,2$ m x $1,0$ m.

Bestimmen Sie unter Beibehaltung des Volumens und der Länge $l = 2,5$ m die Maße für die Breite b und Höhe h eines zweiten Containers. Für dessen Herstellung soll der Materialverbrauch möglichst gering sein.

18) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ werden gesucht:

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
- die Koordinaten der Nullpunkte,
- die Pole und eventuelle Lücken,
- die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung,
- die Wendepunkte (ohne 3. Ableitung) und
- der Definitions- und Wertebereich.
- Ist die Funktion an der Stelle $x = -2$ stetig? Antwort mit Begründung.
- Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f im Intervall $I = [-5; 4]$ an.

19) Gegeben sind die im Bereich \mathbb{R} definierten Funktionsscharen

$$f(x) = -\frac{1}{a^2}x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a \quad \text{mit} \quad 0 < a < 1$$

- Skizzieren Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen f und g für $a = 0,5$.
- Berechnen sie den von den Graphen zu f und g eingeschlossenen Flächeninhalt $A(a)$ in Abhängigkeit von a .
- Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt $A(a)$ maximal?

20) Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion 5. Grades hat bei $N_1(\sqrt{10} | 0)$ und $N_2(-\sqrt{10} | 0)$ je eine Nullstelle und geht durch den Punkt $P_1(1 | 0,9)$. Die Wendetangente im Punkt $P_2(0 | 0)$ hat den Anstieg $m = 0$. Bestimmen Sie die Funktion.

21) Gegeben ist die Kurvenschar mit $f_a(x) = -x^3 + ax$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Der Graph der Funktion schließt mit der x -Achse ein Flächenstück ein, das von der Geraden $x = 1$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 geteilt wird. Bestimmen Sie a so, dass gilt: $A_1 = A_2$.

22) In einem räumlichen Koordinatensystem liegen die Geraden g_1 und g_2 .

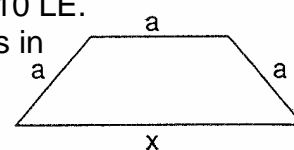
$$g_1: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R} \quad g_2: \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0,5 \\ 2a \end{bmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}$$

- Bestimmen Sie den Spurpunkt S der Geraden g_1 mit der xy -Ebene.
- Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch den Spurpunkt S geht und parallel zur z -Achse verläuft.
- Beschreiben Sie die Lage der Geraden g_2 für $a = 0$.
- Bestimmen Sie a so, dass die Geraden g_1 und g_2 parallel zueinander sind.
- Für welchen Wert von a schneiden sich die Geraden g_1 und g_2 im Punkt $B(6 | -1/7)$?

23) Die Seite a des dargestellten gleichschenkligen Trapezes ist 10 LE.

- Zeigen Sie, dass der maximale Flächeninhalt des Trapezes in Abhängigkeit von x

$$A(x) = \frac{x+10}{4} \sqrt{300 + 20x - x^2} \quad \text{ist.}$$



- Wie groß muss die Seite x des Trapezes gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird?

Hinweis: Auf $A''(x)$ kann verzichtet werden.

24) Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 - x^2 + 18x + 9$

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen,
- die Koordinaten der Nullstellen,
- die Extrempunkte und
- die Wendepunkte.
- Skizzieren Sie die Funktion.

25) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Koordinatenursprung eine Nullstelle und an der Stelle $x_E = -1$ ein Extrema hat. Der Anstieg der Wendetangente an

$$\text{der Stelle } x_W = -\frac{1}{6} \text{ ist } m_W = -\frac{25}{12}.$$

26) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{10}{x^2 - 1}$ werden gesucht:

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
- die Koordinaten der Nullstellen,
- die Pole und eventuelle Lücken,
- die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung,
- die Wendepunkte und
- der Definitions- und Wertebereich.
- Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f im Intervall $I = [-4; 4]$ an. Hinweis: Erstellen Sie nur die Ableitungen, die benötigt werden.

27) Eine ganzrationale Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Ermitteln Sie:

- das Verhalten des Graphen im Unendlichen
- die Nullstellen im Intervall $I = [-3; 3]$ mit dem Newtonschen Näherungsverfahren mit einer Genauigkeit von $|f(x)| \leq |0,005|$.
- Die Extrema und
- die Wendepunkte bzw. Sattelpunkte.
- Zeichnen Sie den Graph der Funktion f mit allen ermittelten Punkten.

28) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1 | -1 | 2)$, $B(3 | 0 | -2)$ und $C(-2 | 1 | 0)$ gegeben, sowie der Punkt $D(a | a-2 | a+1)$ mit $a \in \mathbb{R}$

- Die Punkte A und B , sowie C und D legen jeweils eine Gerade fest. Ermitteln Sie die Gleichungen g und h_a dieser Geraden.
- Zeigen Sie, dass keine dieser Geraden h_a parallel zur Geraden g verläuft.
- Bestimmen Sie den Wert der Zahl a so, dass die zugehörige Gerade h_a die Gerade g schneidet, und berechnen Sie für dieses a ($a \in \mathbb{R}$) die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h_a .
- Geben Sie mit Hilfe Ihres ermittelten Wertes für a die Geradengleichung für h an.
- Ermitteln Sie den Schnittwinkel zwischen g und h .

29) Der Graph einer Funktion vierter Ordnung hat im Ursprung eine waagerechte Tangente und im Punkt $W(-2 | 2)$ einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion.

30) Im räumlichen Koordinatensystem $\{0; i; j; k\}$ sind die Punkte $A(-2 | 8 | -2)$ und $B(-4 | 10 | 10)$ gegeben.

- Stellen Sie die Geradengleichung für die Gerade g , die durch A und B geht, auf.
- Liegt der Punkt $P_0(-2 | 2 | 8)$ auf der Geraden g ?
- Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren \overrightarrow{AO} und $\overrightarrow{OP_0}$!
- Die Gerade g durchstößt die yz -Ebene im Spurpunkt P_{yz} und die xz -Ebene in P_{xz} . Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Spurpunkte.

31) Ein Grundstück hat einen rechteckigen Flächeninhalt von 3200 m^2 und wird an einer Stelle durch eine Mauer begrenzt. Bestimmen Sie die Seiten so, dass sein Umfang möglichst klein wird.

32) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x - 1}$

Ermitteln Sie

- a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptote,
- b) die Koordinaten der Nullpunkte,
- c) die Polstellen, die Extrempunkte ohne Minimum/Maximum-Entscheidung, Skizze vom Graphen der Funktion f .