Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 13. Klasse (Teil 3)

Lehnen

Stand 6.2010

Stochastik

Übungen: Laplacewahrscheinlichkeiten

1. Eine Münze wird fünfmal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   1.1. mindestens einmal Wappen fällt;
   1.2. genau zweimal Wappen fällt;
   1.3. höchstens dreimal Zahl fällt.

2. Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   2.1. genau zweimal die Sechs geworfen wird;
   2.2. genau eine Sechs gewürfelt wird;
   2.3. drei verschiedene Zahlen gewürfelt werden.

3. Es liegen zwei Urnen U1 und U2 vor: U1 enthält Kugeln mit den Zahlen 1 bis 9, U2 mit den Zahlen 1 bis 5. Zunächst wird eine Urne, dann eine Kugel aus der Urne gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trägt die Kugel - a) eine gerade Zahl, - b) eine ungerade Zahl?

4. Eine Urne enthält 5 gelbe, 3 blaue und 4 rote Kugeln.
   4.1. Der Urne werden der Reihe nach 5 Kugeln mit zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe
   A: 2 rote Kugeln;
   B: 2 blaue und 3 gelbe Kugeln;
   C: 5 gelbe Kugeln;
   D: 3 rote und 2 blaue Kugeln.
   4.2. Der Urne werden der Reihe nach 5 Kugeln *ohne* Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die entsprechenden Ereignisse A,...,D.

5. Wenn man Reißzwecken wirft, dann tritt bei jedem Wurf die Lage "*Kopf*" mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 ein und die Lage "*Seite*" mit der Wahrscheinlichkeit 0,6. Ein Reißnagel wird dreimal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt
   5.1. das Ergebnis (S/K/S) ein?
   5.2. das Ereignis A: "mindestens zweimal Seite" ein?
   5.3. das Ereignis B: "mindestens zweimal Kopf" ein?
   5.4. das Ereignis C: "genau zweimal Kopf" ein?

6. In einer Segelgruppe mit 16 Männern und 13 Frauen werden 2 Personen für den Küchendienst und 2 Personen für den Reinigungsdienst eingeteilt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
   6.1. Faust und Mephistopheles haben Küchen-, Gretchen und Margarete haben Reinigungsdienst;
   6.2. Faust und Mephistopheles haben Küchendienst
   6.3. Faust hat auf jeden Fall Küchendienst, alles andere ist ihm egal;
   6.4. Zwei Männer haben Küchen-, zwei Frauen haben Reinigungsdienst.

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Einige Grundgedanken zur Wahrscheinlichkeit

„Die Theorie der Wahrscheinlichkeit ist ein System, das uns beim Raten hilft“, schrieb der Physiker RICHARD FEYNMAN (1918-1988). Wer daraufhin hoffnungsfroh im Brockhaus unter „Wahrscheinlichkeit“ nachschlägt, wird jedoch mit philosophischen Streitfragen und der Drohung konfrontiert, dass eine mathematische Definition des Begriffes „sehr komplizierter mengentheoretischer Untersuchungen bedürfe.“ Ingenieure wiederum, schauen in das enzyklopädische Handbuch der Ingenieurwissenschaften und müssen dort erfahren: „Es gibt keine gleichzeitig anschauliche wie umfassende und exakte Definition der Wahrscheinlichkeit.“

Tja, und nun?

Wahrscheinlichkeit ist nach FEYNMAN also demjenigen nützlich, der eine Frage beantworten will, die er nicht mit Gewissheit beantworten kann. Er versucht, seinen Wissensstand mithilfe der Wahrscheinlichkeitslehre nach Hinweisen dafür abzuklopfen, welche Antwort er geben sollte. Die Frage ist: Gibt es echten Zufall, also Ereignisse, auf deren Eintreten prinzipiell zu keinem vorherigen Zeitpunkt mit Gewissheit geschlossen werden kann –härter formuliert: Gibt es Ereignisse ohne Ursache?

Zur Wissenschaft wurde das Raten etwa in der Mitte des 17. Jahrhunderts. In ihren Lehrbüchern wird von Münzen berichtet, die man in die Luft wirft, oder auch von markierten Kugeln, die aus einer *Urne* gezogen werden. Komischerweise ist es im Lehrbuch immer eine Urne.

In Fernsehshows wird oftmals der Gewinner durch Ziehen einer Karte aus einem Sack, einer Acrylkiste o.ä. ermittelt. Befinden sich in dem Behältnis 1000 Karten, so ist die Wahrscheinlichkeit für eine ganz bestimmte Karte ein Tausendstel. Dafür gibt es eine Formel:

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{1}{1000}$$

P steht für Wahrscheinlichkeit (probability),

A ist das Ereignis, nach dem gefragt wird,

P(A) ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A und

N_A ist die Anzahl der Ergebnisse, nach denen gefragt wird.

N ist die Anzahl aller gleich wahrscheinlichen Ergebnisse. Wer mag, darf hier statt gleich wahrscheinlich auch zufällig sagen. Es ist zufällig, welche Karte aus dem Behältnis herausgenommen wird, jedenfalls aus der Sicht der Beteiligten und mindestens solange kein Multi-Millionen-Forschungsprojekt von Psychologen, Physiologen, Mathematikern und Physikern angeworfen wird, das den Greifprozess der Glücksfee in allen seinen Varianten untersucht. Den Tipp verdanken wir dem großen Mathematiker und Astronom PIERRE SIMON LAPLACE (1749-1827), weshalb derartige Versuche auch Laplace–Versuche genannt werden.

Verblüffend:

Die Gleichung $P(A) = \frac{N_A}{N}$ erlaubt keineswegs einen gesicherten Umkehrschluss:

„Stellen wir uns vor, jemand gibt uns eine Urne mit (endlich vielen) schwarzen und weißen Kugeln und versichert uns, dass die Wahrscheinlichkeit, eine weiße Kugel zu ziehen, 0,5 sei. Können wir daraus schließen, dass die Hälfte der Kugeln weiße sind?“

Wir können es nicht. Angenommen, die Urne sei von einem Zufallsgenerator bestückt worden. Der Apparat ließ schwarze und weiße Bälle mit einer Wahrscheinlichkeit von je 0,5 hineinkullern. Wenn wir nicht in die Urne hineinsehen, können wir jetzt sagen: Die Chance, eine weiße Kugel zu ziehen, beträgt deshalb 0,5 – dennoch kann es sein, dass in der Urne beispielsweise mehr schwarze als weiße Kugeln liegen.

Ziegenproblem

Das Ziegenproblem, auch als „Drei-Türen-Problem", „Monty-Hall-Problem" oder „Monty-Hall-Dilemma" bekannt (nach dem Moderator der US-amerikanischen Spielshow „Let's make a deal", Monty Hall), wird als Beispiel zur Veranschaulichung des Verständnisproblems der bedingten Wahrscheinlichkeiten herangezogen.

Das Problem

Bei einer Spielshow soll der Kandidat eines von drei aufgebauten Toren auswählen. Hinter einem verbirgt sich der Gewinn, ein Auto, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege, also Nieten (oder Trostpreise). Folgender Spielablauf ist immer gleich und den Kandidaten vorab bekannt:

1. Der Kandidat wählt ein Tor aus, welches aber vorerst verschlossen bleibt.
2. Daraufhin öffnet der Moderator, der die Position des Gewinns kennt, eines der beiden nicht vom Kandidaten ausgewählten Tore, hinter dem sich eine Ziege befindet. Im Spiel befinden sich also noch ein Gewinn und eine Niete.
3. Der Moderator bietet dem Kandidaten an, seine Entscheidung zu überdenken und das andere Tor zu wählen.

Wie soll der Kandidat sich entscheiden, um seine Gewinnchance zu maximieren?

Unschärfe

In der originalen amerikanischen Version war nicht ausdrücklich festgelegt, dass Mr. Hall das bereits gewählte Tor nicht öffnet – das erschien nur so nach den bisherigen Spielen. Mr. Hall demonstrierte das bei einem Versuch, nachdem er den Text von Marilyn vos Savant genau analysiert hatte: Nachdem ein Kandidat das Tor 1 gewählt hatte, hinter dem eine Ziege stand, hätte er es öffnen können und sagen: ‚Leider eine Ziege'. Als Spielleiter hatte Mr. Hall das theoretisch in der Hand. Nimmt man diese Verhaltensweise des Moderators an und öffnet man dann eine der anderen Türen, dann ist die Wahrscheinlichkeit jeweils 1/2.

Beim Ziegenproblem wird hier im Weiteren davon ausgegangen, dass der Spielleiter das vom Kandidaten gewählte Tor nicht öffnet. Das entspricht auch dem üblichen Verständnis der Show.

Hintergrund

Zum ersten Mal wurde ein äquivalentes Problem 1889 von dem französischen Mathematiker Joseph Bertrand veröffentlicht. Er beschrieb es als das „Drei-Kasten-Problem".

Berühmtheit erlangte das Ziegenproblem 1990 durch eine Lösungsbeschreibung der US-amerikanischen Kolumnistin Marilyn vos Savant im „Parade Magazine", deren Richtigkeit zunächst selbst von Mathematikern angezweifelt wurde. Frau Savant wurde zeitweise von einigen Mathematikern, die das Problem ungenügend durchdacht hatten, übel beschimpft. Die Einwände zur Richtigkeit bezogen sich dabei allerdings nicht auf die sprachliche Unschärfe des Problems. Diese wären von Frau Savant akzeptiert worden.

Lösung und Erklärung

Auch wenn viele Menschen dazu neigen, davon auszugehen, dass es keinen Unterschied zwischen dem Torwechsel oder dem Verharren auf der getroffenen Entscheidung gäbe, ist diese Annahme falsch. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Auto hinter dem zuerst gewählten Tor befindet, beträgt 1/3 und die Wahrscheinlichkeit, dass es hinter einem der anderen beiden steht, 1/3 + 1/3 = 2/3. Wenn von den beiden Toren, auf die zusammengenommen die Wahrscheinlichkeit 2/3 zutrifft, dasjenige mit der Niete geöffnet wird, verbleibt die höhere Wahrscheinlichkeit von 2/3 allein auf dem letzten Tor. Das vom Kandidaten am Anfang ausgewählte erste Tor dagegen bleibt jedoch bei der Wahrscheinlichkeit von 1/3. Bei einem Wechsel verdoppelt der Kandidat also seine Chancen auf das Auto.

Faktisch hat nämlich das bloße Öffnen eines der beiden verbliebenen Tore mit einer Niete dahinter keinerlei Auswirkungen auf die Gewinnwahrscheinlichkeit. Der Moderator beweist dem Kandidaten durch das Öffnen nur, dass hinter mindestens einem der beiden verbliebenen Tore eine Niete steckt. Das wusste der Kandidat bei drei Toren und zwei Nieten aber schon vorher. Also bietet der Moderator lediglich an, dass der Kandidat durch einen Tor-Wechsel das Auto dann bekommt, wenn es hinter einem beliebigen der zwei verbliebenen Tore steckt. Statt einem Tor darf der Kandidat nun also auf Wunsch faktisch zwei Tore auf einmal auswählen - dies verdoppelt natürlich die Gewinnchance.

Um die Lösung zu verstehen, muss man bedenken, dass die Chance auf einen Gewinn hinter dem gewählten Tor von Anfang an nur 1/3 betrug und sich beim Festhalten des Spielers an seiner Wahl auch nicht ändert – unabhängig ob der Showmaster ein Ziegentor öffnet oder nicht –, andererseits beträgt die Wahrscheinlichkeitssumme aller Auswahlmöglichkeiten 3/3, also 1. Oder anders: In 2/3 aller Fälle hat der Kandidat eine Tür mit einer Ziege ausgewählt. Der Moderator muss auf jeden Fall eine Tür mit einer Ziege öffnen. Das heißt, dass in 2/3 aller Fälle die verbliebene Tür den Preis enthält. Daher ist ein Wechsel strategisch stets sinnvoll.

In einem Satz: Kann man durch eigene Wahl nur eine Wahrscheinlichkeit von 1/3 erreichen, verbleiben nach Aufzeigen der Niete die anderen 2/3 beim dritten Tor, welches man wählen sollte.

Wesentliche Voraussetzung

Eine wesentliche Voraussetzung für diese überraschende Lösung ist allerdings, dass der Moderator weiß, hinter welchem Tor sich der Hauptgewinn befindet und dass der Moderator auf jeden Fall nicht das Tor mit dem Auto und nicht das vom Kandidaten ausgewählte Tor aufmacht. Wenn auch der Moderator nicht weiß, wo der Hauptgewinn verborgen ist, und auch das Tor des Kandidaten öffnen darf, öffnet er in 1/3 aller Fälle das Tor für den Hauptgewinn. Die Chance, dass der Kandidat den Hauptgewinn erhält, bleibt dann 1/3, sowohl mit als auch ohne Wechsel. Wenn der Moderator die Tür mit dem Auto öffnet, ist sie Null bzw. Eins, sonst jeweils 50 %.

Auflösung der verbreiteten Fehlargumentation

Der häufigste Grund für das Finden einer falschen Antwort besteht darin, dass man sich nach dem Öffnen des Ziegentores fälschlicherweise eine „vergleichbare“ Situation vorstellt: Wenn man die Auswahl zwischen zwei Toren hat, aber nur eines das richtige ist, dann stehen die Chancen 50:50.

Dies ist dann richtig, wenn der Kandidat eines der beiden verbleibenden Tore zufällig wählt, also seine erste Wahl zufällig ändert oder nicht, beispielsweise durch Münzwurf. Bei einer Entscheidung ohne sein Vorwissen darüber, welches der Tore er zuerst gewählt hatte und welches nach Ausschluss durch den Moderator übrig bleibt, sind die Gewinnchancen ausgeglichen.

Weil der Kandidat aber weiß, dass der Moderator die Gewinnaussichten zweier Tore förmlich zu einem Tor zusammenlegt, verschiebt sich das Verhältnis zugunsten des noch nicht gewählten Tores. Die beste Strategie ist die, sich auf einen Wechsel festzulegen, womit der Kandidat nur bei der ersten Wahl zufällig handelt.

Fehleinschätzung durch Fehlinterpretation der Rolle des Moderators

Ein weiterer Grund für das Finden einer falschen Antwort ist ein falsches Verständnis der Rolle des Moderators. Es wird oft fälschlicherweise angenommen, dass dieser irgendeine der anderen beiden Türen öffnet, wobei dann zufällig die Ziege zum Vorschein kommt. Dann würde aber auch mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 das Auto vom Moderator selbst gezeigt werden, und das darf er nicht. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür das Auto steckt, und muss genau diese Tür geschlossen halten.

Bei einer Sendung wie „Wer wird Millionär?“ dagegen erhöht sich die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht, wenn ein Kandidat sich vor Anwendung des „fifty-fifty-Jokers“ für eine Antwort entscheidet und sich nach dem Wegfallen von zwei Antworten umentscheidet. Der Computer kann die vom Kandidaten ausgewählte Antwort wegfallen lassen, wenn diese falsch ist, und braucht sich nicht auf die übrigen Antwortmöglichkeiten einzuschränken.

Eine Fehleinschätzung besteht in der Annahme, der Moderator versuche, den Teilnehmer irrezuführen und ihn zum Wechseln zu bewegen, um die Gewinnwahrscheinlichkeit zu verringern. Eine solche „Irreführung“ würde in Wirklichkeit dem Teilnehmer theoretisch helfen, seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu verbessern, wenn er wechselt. Allerdings ist dabei nicht berücksichtigt, dass der Moderator in der Praxis weiß, ob der Kandidat sich ursprünglich für das Auto entschieden hat oder nicht und dementsprechend sein Verhalten gegenüber dem Kandidaten davon abhängig machen kann.

Schema für die (richtige) „Immer-Wechsel“-Strategie

Bei einer „Immer-Wechsel“-Strategie zeigen sich drei Fälle, anhand der drei vom Kandidaten gewählten Türen:
Auto hinter Tor C, Kandidat wählt A Der Kandidat wählt vorerst A, die Ziege B wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von A auf C) gewinnt er.
Auto hinter Tor C, Kandidat wählt B Der Kandidat wählt vorerst B, die Ziege A wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von B auf C) gewinnt er.
Auto hinter Tor C, Kandidat wählt C Der Kandidat wählt vorerst C, eine Ziege (A oder B) wird ihm gezeigt, durch einen Wechsel (von C auf B bzw. A) verliert er.

Fazit: Er gewinnt in zwei von drei Fällen durch einen Wechsel.

Sprachlich einfache Erklärungen

Der Moderator kann nur ein Tor öffnen, hinter dem sich der Gewinn nicht befindet. Ein Kandidat, der sich immer gegen den Wechsel entscheidet, gewinnt nur, wenn er auf Anhieb das richtige Tor trifft. Dies geschieht in einem Drittel der Fälle. Ein Kandidat, der immer wechselt, verliert in allen Fällen, in denen er ohne Wechsel gewinnt, also einem Drittel der Fälle, und gewinnt folglich in zwei Dritteln der Fälle.

Alternativ kann man sich auch folgende Interpretation des Spieles durch den Kandidaten vorstellen: Der Kandidat wählt zwei Türen aus und bittet den Moderator, eine Niete sicher auszuschließen, so dass von zwei Türen nur noch dann eine Niete übrig bleibt, wenn der Gewinn schon vorher hinter der nicht ausgewählten Tür versteckt war. Ganz offensichtlich ist die Gewinn-Chance hier zwei Drittel. Der Kandidat kann den Moderator dadurch zur Mitarbeit benutzen, indem er vorgibt, sich für die eigentlich ausgeschlossene Tür zu entscheiden, woraufhin der Moderator die gewünschte Auswahl in den zwei eigentlich gewählten Türen vornimmt. Zur übriggebliebenen Tür wird der Kandidat dann offen wechseln, sie gehörte ja ohnehin zu seinen beiden Auswahlkandidaten.

Recht einsichtig wird das Ganze auch, wenn man die Situation etwas erweitert. Zur Vereinfachung der Beschreibung sei dabei angenommen, der Kandidat habe sich für Tor 1 entschieden und der Moderator habe Tor 2 geöffnet, d. h. der Kandidat kann sich zwischen Tor 1 und Tor 3 entscheiden. Ohne dass sich irgendetwas an der Wahrscheinlichkeit ändert, den Gewinn zu bekommen, kann man nun auch annehmen, dass der Moderator dem Kandidaten zusätzlich zu dem Gegenstand hinter Tor 3 auch noch die Ziege hinter Tor 2 schenkt. Ebenfalls ändert sich nichts an der Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn der Moderator Tor 2 nun wieder schließt. Und es ändert sich auch nichts an der Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn der Moderator die Nummern von den Toren 2 und 3 abnimmt, so dass der Kandidat nicht mehr weiß, welches Tor ursprünglich Nummer 2 und welches 3 war (er bekommt ja sowieso beide). Damit wäre das Problem reduziert auf die Aufgabe, entweder Tor 1 zu wählen oder aber die beiden anderen, wobei klar ist, dass hinter einem der anderen beiden Tore eine Ziege steht. Betrachtet man nun diese Aufgabenstellung losgelöst vom ursprünglichen Problem, wird intuitiv jeder zur Wahl der beiden anderen Tore tendieren, denn bei der Wahl von 2 Toren ist logischerweise die Gewinnwahrscheinlichkeit höher als bei der Wahl von nur einem Tor.

Wird das Spiel gedanklich auf n Türen erweitert, wobei der Moderator nach der ersten Wahl des Kandidaten n-2 Türen mit Nieten öffnet, wird die optimale Strategie des Umentscheidens für große n unmittelbar deutlich, z. B. am Beispiel einer Losbude mit einem Hauptgewinn und n-1 Nieten, also z. B. n = 1000 Losen. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler mit seiner ersten Wahl richtig liegt, beträgt 1:1000. Nachdem der Losbudenbesitzer 998 Nieten aus dem Loseimer entfernt hat, empfiehlt es sich für den Spieler, sich umzuentscheiden.

Varianten

Geh aufs Ganze

Das Ziegenproblem ähnelt der Spielshow „Geh aufs Ganze!“, unterscheidet sich aber in einem wesentlichen Punkt: Beim Ziegenproblem ist immer genau ein Gewinn vorhanden. Bei „Geh aufs Ganze“ können auch mehrere und wertmäßig unterschiedliche Gewinne vorhanden sein, unter anderem auch ein offenes Geldangebot in bar. Der Moderator bietet dem Spieler Geld, wenn er sich umentscheidet und das vom Moderator gewollte Tor nimmt. Der Moderator feilscht regelrecht mit dem Spieler, erhöht sein Angebot (100, 200, 300... Euro) und geht bis zu einem Limit, das der Spieler vorher nicht kennt. Wenn sich dann der Spieler nicht sofort für das Geld entscheidet, ist das Angebot weg und der Spieler muss das gewählte Tor nehmen. Deshalb unterscheidet sich hier die optimale Strategie. Sie hängt maßgeblich von der Risikoaversion des Kandidaten ab. Der Moderator erhöht schrittweise die sichere Alternative (das Geldangebot), bleibt dabei jedoch unter dem Wert des Hauptpreises. Der Kandidat muss entscheiden, ob ihm das sichere Geldangebot mehr wert ist als die Chance auf den Hauptgewinn. Die Entscheidungstheorie nennt dies das Sicherheitsäquivalent.

Mehrere Türen

Um die richtige Lösung zu veranschaulichen, wird die Problemstellung gelegentlich auf eine höhere Anzahl von Türen übertragen, zum Beispiel 100. Die Regeln des n-Türen-Problems (n = 3 oder größer) sind:

* Der Kandidat wählt eine Tür aus.
* Der Moderator öffnet alle bis auf eine der verbleibenden Türen, im Spiel befinden sich also nur noch ein Gewinn und eine Niete.
* Der Kandidat erhält die Möglichkeit, die Tür zu wechseln.

Es ist ziemlich offensichtlich, dass der Kandidat bei 100 Türen nur mit 1%iger Wahrscheinlichkeit zunächst den Gewinn wählt. Der Gewinn befindet sich also fast immer hinter der anderen Tür. Genauer: wenn der Kandidat konsequent die Tür wechselt, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit gerade die Wahrscheinlichkeit, ursprünglich eine Niete zu erwischen, also (n-1)/n (bei 100 Türen 99 %, beim ursprünglichen Ziegenproblem 2/3).

Nach dem Öffnen der Türen liegt übrigens dieselbe Situation vor wie beim ursprünglichen Ziegenproblem mit nur 3 Türen. Ein unbedarfter Kandidat könnte hier also wieder argumentieren, dass die Gewinnchance 1/2 ist (da es ja auf die Vorgeschichte nicht ankomme). Dies ist auch korrekt, wenn er einfach nur zufällig eine der beiden verbleibenden Türen wählt (zum Beispiel durch Werfen einer Münze). Wie eben erläutert, kann er jedoch die Chancen erhöhen, wenn er sein Vorwissen nutzt.

Literatur

* Gero von Randow: Das Ziegenproblem – Denken in Wahrscheinlichkeiten. Rowohlt, Reinbek 1992. ISBN 3-499-19337-X
* Olle Häggström: Streifzüge durch die Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer, Berlin 2005. ISBN 3-540-23050-5
* Henk Tijms: Understanding Probability, Chance Rules in Everyday Life. University Press, Cambridge 2004. ISBN 0521833299
* Gerd Gigerenzer: Das Einmaleins der Skepsis - Über den richtigen Umgang mit Zahlen und Risiken. Berlin-Verlag, Berlin 2002. ISBN 3-8270-0079-3
* Hans-Otto Georgii: Stochastik, Einführung in Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastik, Seite 54 f, Gruyter, August 2004. ISBN 3110182823Informationsblatt:

Ereignisse, Wahrscheinlichkeitsfunktionen, Laplace-Wahrscheinlichkeiten

1. Ein *Zufallsexperiment* ist ein beliebig oft wiederholbarer Versuch mit eindeutig bestimmten Ergebnissen, die sich jedoch nicht mit Sicherheit voraussagen lassen.

2. Der *Ergebnis- oder Stichprobenraum* ist die Menge $S \neq \emptyset$ der möglichen Versuchsergebnisse. Ein einzelnes Ergebnis wird mit e_i bezeichnet.

3. Eine Teilmenge *A* der Versuchsergebnisse, d.h. $A \subseteq S$, heißt ein *Ereignis*. Die Menge $P(S)$ ist mithin die Menge aller Ereignisse.

4. Man nennt ein *Ereignis A* bei einem Versuchsergebnis e_i „eingetreten“, wenn gilt: $e_i \in A$, sonst heißt es „nicht eingetreten“.

5. Besondere Ereignisse, kombinierte Ereignisse und Beziehungen zwischen Ereignissen:

$A \cap B$	Und-Ereignis	$A \cup B$	Oder-Ereignis
$\overline{A} = S - A$	Gegenereignis	$\{e_i\}$	Elementarereignis
$\emptyset$	unmögliches Ereignis	S	sicheres Ereignis
$A \cap B \neq \emptyset$	*A*, *B* vereinbar	$A \cap B = \emptyset$	*A*, *B* unvereinbar
$A \subseteq B$	*A* zieht *B* nach sich		

6. Darstellung von Ereignissen:

Beide Ereignisse treten ein:	$A \cap B$
Höchstens ein Ereignis von beiden tritt ein:	$\overline{A \cap B}$
Keines der beiden Ereignisse tritt ein:	$\overline{A} \cap \overline{B}$
Mindestens eines der Ereignisse tritt ein:	$A \cup B$
Genau eines der beiden Ereignisse tritt ein:	$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

7. Gegeben ist eine Ergebnismenge *S*. Eine Funktion *P*, die jedem Ereignis über *S* eine reelle Zahl zuordnet (d.h. *P*: $P(S) \to \mathrm{IR}$) heißt *Wahrscheinlichkeitsfunktion*, wenn gilt:

$P(A) \geq 0 \quad \textit{für alle } A \in P(S)$ „ P ist positiv “

$P(S) = 1$ „ P ist normiert “

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \ \textit{für } A \cap B = \emptyset$ „ P ist additiv “

Die einem Ereignis *A* zugeordnete reelle Zahl $P(A)$ heißt *Wahrscheinlichkeit* von *A*.

bitte wenden

8. Ist S endlich und sind alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich („Laplace-Annahme“), d.h.: $P(\{e_i\}) = \frac{1}{|S|}$, dann gilt:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\textit{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\textit{Anzahl der überhaupt möglichen Ergebnisse}}$$

Die Werte der Funktion P heißen in diesem Falle *Laplace-Wahrscheinlichkeiten* für die Ereignisse A.

9. Folgerungen für Wahrscheinlichkeiten:

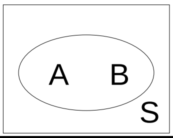
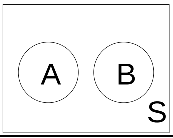
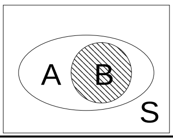
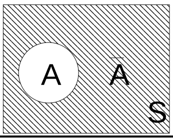
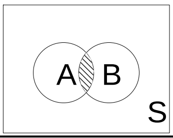
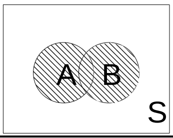
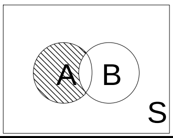
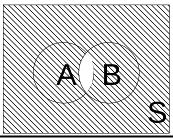
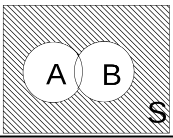
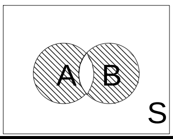
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(\emptyset) = 0$$

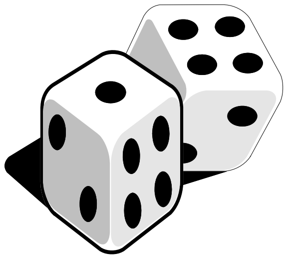
$$P(S) = 1$$

$$P(A) = \sum P(e_i)$$

Informationsblatt:
Mengenlehre / Mengenbeziehungen

	$A = B$	Die Menge *A* ist **gleich** der Menge *B*.
	$A \cap B = \emptyset$	Die Ergebnisse *A* und *B* sind **unvereinbar**, d.h., sie können nicht gleichzeitig auftreten.
	$B \subseteq A$	*B* ist ein Teilereignis von *A*.
	$\overline{A}$	$\overline{A}$ (***A* quer**) ist das Gegenereignis von *A*.
	$A \cap B$	***A* und *B***. Die Schnittmenge ist die Menge aller Ereignisse, die zu *A* und *B* gehören.
	$A \cup B$	***A* oder *B*.** Die Menge aller Ereignisse, die zu *A* oder zu *B* oder zu beiden gehören.
	$A \setminus B$	**Differenzmenge** Menge aller Ereignisse *A*, die nicht zu *B* gehören.
	$\overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A}$ oder $\overline{B}$ tritt genau dann ein, wenn **nicht beide** Ereignisse eintreten.
	$\overline{A} \cap \overline{B}$	**Weder *A* noch *B*** tritt genau dann ein, wenn keines der beiden Ereignisse *A*, *B* eintritt.
	$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$	**Entweder *A* oder *B*.**

Einführung: Zufallsexperimente und relative Häufigkeiten



1. Mit zwei Würfeln wird gleichzeitig gewürfelt. Auf welchen Wert stabilisiert sich die relative Häufigkeit für einen Pasch (zwei gleiche Zahlen)?

2. Aus einer Urne mit zwei schwarzen und einer roten Kugel soll zufällig eine Kugel gezogen werden. Bestimmen Sie zunächst den Ergebnisraum und dann alle möglichen Ereignisse. Berechnen Sie anschließend die Wahrscheinlichkeiten für diese Ereignisse.

3. Die Karten eines Skatspiels werden gründlich gemischt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die unterste Karte eine 10 oder eine Bildkarte?

4. Aus einer Gruppe von 11 Mädchen und 8 Jungen wird eine Person zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Junge bzw. ein Mädchen?

5. Beim Würfeln mit zwei Würfeln werden die beiden Augenzahlen multipliziert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Ergebnis

   5.1. größer als 18,
   5.2. gleich 12?

Auch der *Zufall* ist nicht unergründlich,
er hat seine Regelmäßigkeit.
(Novalis, Fragmente)

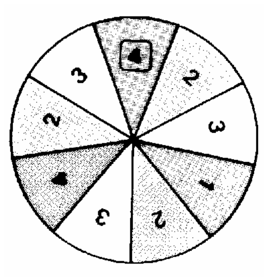
Arbeitsblatt Wahrscheinlichkeiten

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird beim Würfeln mit zwei Würfeln

   1.1 ein Pasch (zwei gleiche Augenzahlen),
   1.2 keine Sechs,
   1.3 mindestens eine Sechs gewürfelt?

2. Ein Glücksrad enthält neun gleich große Sektoren mit den Nummern 1 bis 4. Der Gewinnplan lautet:

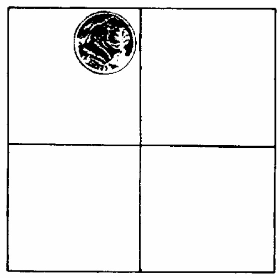
   1: 1,80 €
   2: 0,60 €
   3 oder 4: 0,00 €.



   2.1 Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man?
   2.2 Bei welchem Einsatz ist das Spiel fair?

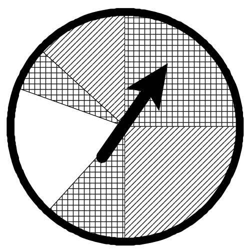
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein auf die Erde stürzender Meteorit ins Wasser?

4. Ein Quadrat ist in vier gleich große Quadrate der Kantenlänge 4 cm unterteilt. Ein 50 Cent Stück wird auf das Quadrat geworfen. Liegt der Mittelpunkt außerhalb des Spielfeldes, ist der Wurf ungültig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Geldstück ganz im Innern eines der vier Quadrate?

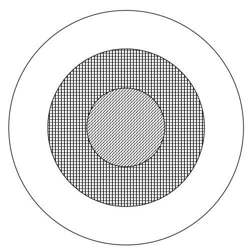


5. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Pfeil des nebenstehenden Glücksrades auf

   5.1 ein kariertes Feld,
   5.2 ein schraffiertes Feld?



6. Ein Pfeil wird zufällig auf die abgebildete Zielscheibe geworfen. Der Wurf wird nicht gewertet, wenn die Scheibe verfehlt wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet die Pfeilspitze im inneren (äußeren) Ring?



Aus den Wolken muss es fallen,
Aus der Götter Schoß, das Glück.
(SCHILLER)

Übungen: Pfadmultiplikations– und Pfadadditionsregel

Pfadmultiplikationsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für ein Elementarereignis bei einem zusammengesetzten Versuch erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm miteinander multipliziert.

Pfadadditionsregel:
Die Wahrscheinlichkeit für ein beliebiges Ereignis A erhält man, wenn man die Wahrscheinlichkeiten aller Elementarereignisse, die in A enthalten sind, addiert.

1. In einer Urne befinden sich fünf schwarze, eine rote und drei weiße Kugeln.

Drei Kugeln werden nacheinander mit/ohne Zurücklegen gezogen;
Es sei A: „genau zwei der insgesamt gezogenen Kugeln sind schwarz“.

   1.1. Welche Wahrscheinlichkeit kommt dem Ereignis A zu?

2. Eine Neuigkeit wird von Mund zu Mund verbreitet. Man kann davon ausgehen, dass der Inhalt in 5% aller Fälle verfälscht wird.
   2.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Neuigkeit zehnmal nacheinander richtig weitererzählt wird?
   2.2. Nach wie viel Weitermeldungen der Neuigkeit ist die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit unter 0,5 gesunken?

3. Hans und Inge spielen Minigolf. Es sei angenommen, dass jeder das 1. Hindernis mit der Wahrscheinlichkeit $p_1 = 0{,}85$ und das 2. Hindernis mit der Wahrscheinlichkeit $p_2 = 0{,}6$ schafft. Jeder habe (entgegen den üblichen Regeln) bei jedem Hindernis nur einen Versuch.
   3.1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Match nach den beiden Hindernissen unentschieden steht, d.h., dass beide Spieler nach zwei Hindernissen die gleiche Anzahl von Treffern haben?
   3.2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach den ersten beiden Hindernissen Inge 2:0 führt.

4. Sieben Freunde machen einen Ausflug nach Helgoland. Ehe sie nachmittags wieder das Schiff besteigen, müssen Sie durch die nächste Zollkontrolle. Zwei von ihnen, Peter und Udo, haben zu viel Zigaretten mitgenommen, die anderen nicht. „Natürlich“ haben bei der Zollkontrolle alle sieben „nichts zu verzollen“. Daraufhin zitiert der Zollbeamte auf gut Glück (alle sehen gleich ehrlich aus) drei von ihnen zur Kontrolle.
   4.1. Berechnen Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass der Beamte mindestens einen Schmuggler erwischt?
   4.2. Geben Sie ein Urnenmodell zur Simulation an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit erneut.

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Mehrstufige Zufallsversuche

Zur Aufnahme für das Medizinstudium wird ein Multiple-Choice-Test durchgeführt. Zu jeder der drei Fragen werden drei Antwortmöglichkeiten angeboten, von denen stets genau eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden, wenn mindestens zwei der drei Fragen richtig beantwortet werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht man den Test bei zufälligem Ankreuzen (bedingt z.B. durch absolutes Unwissen)?

1.
Was ist ein Oropharyngealkarzinom?

- ☐ Krebsgeschwür durch Kauen und Rauchen von Tabak
- ☐ Überträger des Zeckenrückfallfiebers
- ☐ kutane Leishmaniase

2.
Was ist ein kongenitales lobäres Emphysem?

- ☐ subjektive Wahrnehmung eines Sinnesreizes
- ☐ Fehlbildung der Lunge beim Säugling
- ☐ warmer Umschlag

3.
Was ist Atelie?

- ☐ Weiterbestehen kindlicher Merkmale beim erwachsenen Menschen
- ☐ Heilkraut
- ☐ Herzerkrankung

Stellen Sie den Ablauf des dreistufigen Zufallsexperimentes in einem Baumdiagramm dar.

Verblüffendes zum Thema Wahrscheinlichkeiten: Teil II

1. Drei Verurteilte schmachten in der Todeszelle. Die Hinrichtung ist auf den nächsten Tag zur Mittagszeit angesetzt. Am Morgen des schwarzen Tages flüstert ihnen der Wärter zu: „Der Gouverneur hat einen von euch begnadigt! Ich darf aber nicht verraten, wer es ist – es könnte mich den Kopf kosten.“ Der Gefangene A gibt sich damit nicht zufrieden. Er lässt sich zum Anstaltspfarrer führen. Auf dem Weg zum Seelsorger steckt er dem Wärter ein Goldstück zu und bittet ihn: „Gib wenigstens einen Hinweis!“ Der windet sich weiter: „Ich darf dir nicht sagen, wie es um dich steht.“ A lässt nicht locker, es brauche ja nur ein indirekter Hinweis zu sein. Der Wärter wird schließlich mürbe: „Na gut, wer begnadigt ist, darf ich dir nicht sagen, aber eins kann ich wohl verraten: B muss sterben!“ A denkt: „Erst lagen meine Chancen bei 1/3, jetzt sind sie immerhin auf 1/2 gestiegen.“ Ist er zu Recht erleichtert?

2. Nun werden sechs Münzen geworfen, und die Frage lautet, wie die Chancen stehen, dass genau drei davon „Kopf“ zeigen. Ich behaupte, dass die Chance nicht „fifty-fifty“ ist.

Verblüffendes zum Thema Wahrscheinlichkeiten: Teil I

1. Ein Fallschirmspringer hat zwei Fallschirme im Gepäck und will seine Chance bestimmen, dass sich wenigstens einer von beiden öffnet. Angenommen, ein solcher Schirm öffnet sich in 999 von 1000 Fällen. Wie groß ist das Risiko?

2. Mittlerweile ist der Fallschirmspringer aus dem obigen Beispiel sicher gelandet. Bei einer Fallschirmspringershow lassen sich eine Million Fallschirmspringer gleichzeitig aus dem Flugzeug fallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landet mindestens einer von ihnen mit ungeöffnetem Fallschirm?

3. Im folgenden Beispiel liegen zwei Urnen vor. In der einen Urne liegen drei weiße und vier schwarze Kugeln, in der zweiten vier weiße und drei schwarze. Jemand greift zufällig in die eine oder andere Urne und holt eine Kugel heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Kugel weiß ist?

4. In einer Stadt gibt es zwei Krankenhäuser. Im größeren Krankenhaus werden täglich etwa 45 Babys geboren, im kleineren rund 15. Sie können davon ausgehen, dass ungefähr 50% aller Babys Jungen sind. Freilich variiert der genaue Prozentsatz von Tag zu Tag. Manchmal liegt er über, manchmal unter 50%. Ein Jahr lang notiert man in jedem der beiden Krankenhäuser die Tage, an denen mehr als 60% der Neugeborenen Jungen waren. Was meinen Sie, welches Krankenhaus notiert mehr solcher Tage?

5. Beim Werfen mit einer Münze (Laplaceexperiment) bekommen Sie für das Erscheinen des Kopfes eine Mark, wobei Sie bei Erscheinen der Zahl eine Mark abgeben müssen. Werden Sie nach vielen, sagen wir hunderttausend Würfen reicher oder ärmer sein – oder so vermögend wie zuvor?

Übungen: Laplacewahrscheinlichkeiten

1. Werfen zweier unterscheidbarer Würfel.

Wie groß sind die Laplacewahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

1.1. Es wird mindestens eine 6 gewürfelt.
1.2. Es wird höchstens eine 6 gewürfelt.
1.3. Die geworfene Augensumme ist mindestens 10.
1.4. Die geworfene Augensumme ist höchstens 11.
1.5. Es wird genau eine 6 gewürfelt.
1.6. Die geworfene Augensumme ist genau 11.
1.7. Es werden keine zwei Fünfen gewürfelt.
1.8. Es werden verschiedene Zahlen gewürfelt.

2. Aus der Menge der ersten 30 natürlichen Zahlen (ohne 0) wird zufällig eine Zahl ausgewählt.

Wie groß ist die Laplacewahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl

2.1. durch 4, durch 6 bzw. durch 7 teilbar ist?
2.2. durch 4 oder durch 6 teilbar ist?
2.3. durch 4 und durch 6 teilbar ist?
2.4. nicht durch 4 teilbar ist?
2.5. weder durch 4, noch durch 6 teilbar ist?
2.6. durch 4, aber nicht durch 6 teilbar ist?
2.7. durch 7 und durch 6 teilbar ist?
2.8. durch 7 oder durch 6 teilbar ist?

3. Eine Urne enthält 3 rote und 2 schwarze gleichartige Kugeln. Es werden zwei Kugeln zufällig herausgegriffen, und zwar

3.1. gleichzeitig,
3.2. nacheinander, ohne die einzelnen Kugeln zurückzulegen,
3.3. nacheinander, aber mit Zurücklegen der zuerst gezogenen Kugel.

Man bestimme die Laplacewahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen.

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Einige Grundgedanken zur Statistik[1]

Die Pioniere der Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. und 18.Jahrhundert (BERNOULLI, LAPLACE, PASCAL) wollten herausfinden, wie der Mensch mit dem Ungewissen umgehen kann. Ihre Nachfolger, die Statistiker des 19.Jahrhunderts, wollten herausfinden, wie der *Durchschnittsmensch* lebt. Bürgerliche, zum Teil schon industrielle Gesellschaftsordnungen setzten sich damals in Europa durch. Sie führten Menschen und Produktionsmittel zusammen, erschlossen weitläufige Märkte, versahen sich mit starken Zentralstaaten. Geschäftsleute und Politiker, die Trends erkennen wollten, mussten versuchen, Massenerscheinungen zu schematisieren, in Zahlen auszudrücken.
Bislang diente die Wahrscheinlichkeitsrechnung dem Zweck, die Ungewissheit des Ratens zu analysieren und den Zufall zu berechnen. Jetzt wurde das gleiche Instrumentarium genutzt, um zufällige und gesetzmäßige Schwankungen innerhalb großer Zahlenmengen unterscheiden zu können. Bedeutet Wahrscheinlichkeit ein Maß der Gewissheit oder eine Häufigkeitsverteilung? Den Begründern der Theorie ging es um relative Gewissheit; als die Statistik aufkam, schwenkte das Pendel zur anderen Seite. Die Statistik begann als Sozialwissenschaft, als Lehre vom Umgang mit *Zahleninformationen* über die Gesellschaft. Die Statistiker bemühten sich um Ordnung im Faktenhimmel; der Blick der Sozialwissenschaften wandte sich vom Individuum ab und suchte die Gesellschaft als Ganze zu erfassen. Kriminalitätsraten, Sterbe- und Geburtstafeln, Wirtschaftsdaten, das war der Stoff der neuen Wissenschaft.

Täuschende Häufigkeiten:

Mit Statistik wird auch heute gern argumentiert. Dabei tritt eine eigenartige Geistesschwäche des Menschen zutage: seine Unbeholfenheit im Umgang mit Zahlenverhältnissen.
Die Statistik verzeichnet mehr Autounfälle bei klarer Sicht als bei Nebel. Das ist nicht weiter verwunderlich, denn nebliges Wetter ist ganz einfach seltener.
Bei Frauen tritt der Tod nach Herzoperationen relativ häufiger ein als bei Männern, haben sie also schwächere Herzen? Es spricht einiges für die Vermutung, dass Herzstörungen und schwere Herzschäden bei Frauen erst später ernst genommen und entsprechend diagnostiziert werden als bei Männern, weshalb ihr Operationsrisiko höher ist.
Die Zahl der Unfälle von Kindern im Straßenverkehr nimmt leicht ab. Steigt also deren Sicherheit? Ganz und gar nicht – denn erstens nimmt die Zahl der Kinder ab, und zweitens spielen Kinder immer weniger auf der Straße.
Kennen Sie das lähmende Gefühl, an der Kasse im Supermarkt schon wieder in der längsten Schlange zu stehen? Viele sind überzeugt davon, überdurchschnittlich oft in der längeren Schlange zu landen. Es wird auch häufiger von vollen als von leeren Zügen berichtet oder von überfüllten Vorlesungen an der Universität. Das mag alles der Wahrscheinlichkeit entsprechen, aber ein Irrtumsteufelchen spielt dennoch mit: Je voller es ist, desto mehr Leute können berichten. Im ersten Zug fahren 400 Personen, im zweiten 200. Das macht 300 pro Zug, aber es können doppelt so viele Fahrgäste von der Fahrt in einem vollen Zug erzählen. Dieser Effekt ist Statistikern wohl bekannt, schleicht sich aber immer wieder ein.

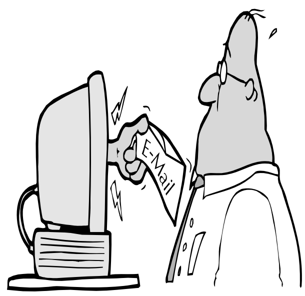
[1] Das Fremdwort Statistik ist seit dem 17.Jahrhundert in der Bedeutung Staatswissenschaft bezeugt. Es ist eine Bindung zu Statist „Staatsmann“.

Arbeitsblatt:

Kombinatorik: Produktregel

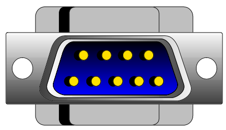
1. Sie befinden sich auf einer Modenschau. Wie viele Variationen sind denkbar, wenn 6 Models die 6 Typen von Abendkleidern des Modehauses vorstellen? Drei Damen im Publikum sind mit der festen Absicht erschienen, sich ein neues Kleid aus der Kollektion zu bestellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? Wie groß ist die Gefahr, dass mindestens 2 Kundinnen dasselbe Modell kaufen?

2. Ein Computerprogramm ist durch ein Passwort geschützt. Es besteht aus 4 unterschiedlichen Buchstaben. Wie viele Passwörter sind möglich? Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann dieser Code mit einem Versuch geknackt werden?



3. Ein Fotograf kann an der Siegerehrung eines Wettkampfes nicht teilnehmen. Daher möchte er schon vor dem Wettkampf ein Foto der drei erstplatzierten machen. Er hat vor, jeweils drei der insgesamt acht Athleten auf dem Siegertreppchen zu fotografieren. Wie viele Fotos muss er anfertigen, damit die Sieger in der richtigen Platzierung mit Sicherheit erfasst werden?

4. Sie haben irrtümlich den Mausanschluss an Ihrem PC durchgetrennt. Die Maus ist über ein dreipoliges Kabel an den gezeigten D-SUB-Stecker angeschlossen. Wie viele Möglichkeiten der Pinbelegung gibt es?

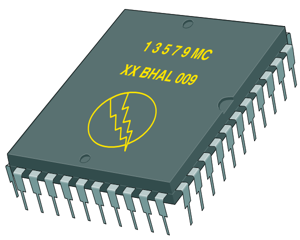


Arbeitsblatt:

Wahrscheinlichkeiten

1. Ein Hersteller von elektrischen Widerständen produziert diese auf drei Maschinen M_1 ,M_2, M_3. 20 % der Widerstände werden auf M_1 , 30% auf M_2 und 50% auf M_3 produziert. Die Ausschussraten betragen 4% für M_1, 3% für M_2 und 2% für M_3. Welche Ausschussrate ergibt sich für die Gesamtproduktion?

2. Ein Betrieb produziert Prozessoren mit einer Ausschussrate von 5%. Da diese Rate von den Abnehmern nicht toleriert wird, durchlaufen die Prozessoren in der Endkontrolle zwei Prüfstufen. In der ersten Prüfstufe werden 70% der ausschüssigen Chips erkannt und aussortiert, aber es werden auch 5% der einwandfreien Chips irrtümlich als Ausschuss eingestuft und aussortiert. Die noch verbleibenden Bauteile passieren die zweite Prüfstufe, die Ausschusschips zu 90% erkennt und aussortiert, während 7% der einwandfreien Chips irrtümlich als Ausschuss eingestuft und aussortiert werden. Welcher Prozentsatz der ursprünglichen Prozessoren wird insgesamt aussortiert?



3. In Berlin ist das Wetter an 70 von 100 Tagen schön und an 30 von 100 Tagen schlecht. Die Senatsverwaltung für Inneres simuliert das Wetter daher mithilfe einer Urne, die 7 rote und 3 schwarze Kugeln enthält. Zieht sie eine rote Kugel, so prognostiziert sie für den nächsten Tag schönes Wetter, andernfalls schlechtes Wetter. Die Anna-Freud-Schule hat einen Breitmaulfrosch unter Vertrag, der schöne Tage mit 90% und schlechte Tage mit 60% Sicherheit vorhersagen kann. Welche Prognosen sind treffsicherer?

Übungen: Urnenmodell II – Ziehen mit Zurücklegen

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen M schwarz und die übrigen N-M weiß sind, werden nacheinander mit Zurücklegen n Kugeln gezogen.

Zu betrachten ist das Ereignis
A_k : „unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau k schwarze Kugeln".

Die Wahrscheinlichkeit, mit der unter den n Kugeln genau k Kugeln schwarz sind, beträgt:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{M}{N}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right)^{n-k} \qquad k = 0,1,\ldots,n$$ (Formel von BERNOULLI[2])

<u>Die folgenden Übungen sind mit kombinatorischer Formel und Baumdiagramm zu lösen!</u>

1. Einer Urne mit 20 schwarzen und 10 weißen Kugeln werden 5 Kugeln mit Zurücklegen entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den 5 Kugeln genau 3 Schwarze?

2. Es liegt ein Fragebogen mit 8 Fragen vor. Zu jeder Frage sind 3 Antworten gegeben, von denen genau eine richtig ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau 6 Fragen durch zufälliges Ankreuzen (Raten) richtig zu beantworten?

3. Bei einem Experiment ist die Wahrscheinlichkeit, einen positiven Messwert zu erhalten 0,25. Das Experiment wird achtmal durchgeführt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit

   3.1. keinen positiven Messwert zu erhalten?
   3.2. höchstens zwei positive Messwerte zu erhalten?

4. Zur Behandlung einer nicht ansteckenden Krankheit wird ein Medikament verabreicht, das erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% zur Besserung führt. Es werden 6 Patienten mit diesem Medikament behandelt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bessert sich der Zustand bei mindestens der Hälfte der Patienten?

5. Ein Glücksrad ist in zwei Sektoren unterteilt. Der Gewinnsektor hat einen Mittelpunktswinkel von 60°. Es wird achtmal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Rad mindestens 4-mal "Gewinn" anzeigt?

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

[2] JAKOB BERNOULLI (1654–1705), Schweizer Mathematiker)

Übungen: Urnenmodell I – Ziehen ohne Zurücklegen

Aus einer Urne mit N Kugeln, von denen M schwarz und die übrigen N-M weiß sind, werden zufällig und ohne Zurücklegen n Kugeln gezogen.

Zu betrachten ist das Ereignis
A_k : „unter den n gezogenen Kugeln befinden sich genau k schwarze Kugeln".

Die Wahrscheinlichkeit, mit der unter den n Kugeln genau k Kugeln schwarz sind, beträgt:

$$P(A_K) = \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k = 0,1,\ldots,\ \min(m,n)\ ,\ n \leq N$$

Die folgenden Übungen sind mit kombinatorischer Formel und Baumdiagramm zu lösen!

1. Einer Urne mit 20 schwarzen und 10 weißen Kugeln werden 5 Kugeln ohne Zurücklegen (bzw. mit einem Griff) entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den 5 Kugeln genau 3 schwarze ?

2. In einer Klasse mit 18 Mädchen und 13 Jungen werden zufällig 4 Schüler für eine Abordnung ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es 2 Jungen und 2 Mädchen sind?

3. In einer Warenlieferung von 100 Stück sind 4 fehlerhafte Stücke. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

   3.1. dass von 3 zufällig ausgewählten Stücken genau eines fehlerhaft ist?
   3.2. dass von 3 zufällig ausgewählten Stücken nicht alle fehlerfrei sind?

4. Eine Tüte mit Blumensamen enthält drei Krokus-, zwei Osterglocken- und fünf Tulpensamen. Es werden drei Samenkörner mit einem Griff entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens ein Krokus- und mindestens ein Osterglockensamen entnommen?

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Zusammenfassung: Urnenziehungen

Wir unterscheiden drei Typen von Urnenziehungen:

1.

Ziehen mit Wiederholung *(geordnete Auswahl mit Zurücklegen):*
Gegeben ist eine Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Es wird k-mal nacheinander eine Kugel gezogen und wieder zurückgelegt.
Das ist auf $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k-Faktoren} = n^k$ verschieden Arten möglich.

2.

Ziehen ohne Wiederholung *(geordnete Auswahl ohne Zurücklegen):*
Gegeben ist eine Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Es wird k-mal nacheinander eine Kugel gezogen und nicht wieder zurückgelegt.
Dies ist auf $\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}_{k-Faktoren}$ verschieden Arten möglich.

3.
Erfolgt dagegen die Ziehung mit einem Griff oder kommt es bei der Ziehung ohne Wiederholung nicht auf die Reihenfolge an, mit der die Kugeln gezogen werden, dann spricht man von einer ungeordneten Auswahl oder einer ungeordneten Stichprobe. Hierdurch wird in der Menge aller Kugeln der Urne eine Untermenge gebildet:

Ziehung auf einen Griff *(ungeordnete Stichprobe):*
Gegeben ist eine Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Es werden k Kugeln mit einem Griff entnommen, d.h., es wird eine k-elementige Untermenge einer n-elementigen Menge gebildet.
Dies ist auf $\dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 1}$ verschiedene Arten möglich.
Für diese Anzahl der Möglichkeiten benutzt man die Schreibweise $\binom{n}{k}$ (lies: n über k).

Verteilungen und Statistik

Zufallsgeneratoren – Zufallszahlen

Der Zentralbegriff der Informatik ist der *Algorithmus* – ein *Schritt für Schritt* ablaufendes Verfahren, das am *Ende* die Lösung eines Problems findet. Algorithmen sind vollständig *determiniert*[3], sie sind geradezu das Sinnbild des Bestimmten, der Abwesenheit von Zufälligem. Computer sind Maschinen, die Algorithmen abspulen. Das bedeutet auch, dass Computer durch und durch determinierte Maschinen sind. Sie können gar keine echten Zufallszahlen produzieren. Die von Computern produzierten Zufallszahlen liefern in Wahrheit nur Werte, deren Zustandekommen determiniert ist – bloß ihre Verteilung ist höchst unübersichtlich.

Ein verbreiteter Zufallsgenerator funktioniert so: Der Programmierer legt eine zum Beispiel achtstellige Zahl fest, die als „Seed“ (Samenkorn) bezeichnet wird. Eine zweite Zahl, die Konstante, arbeitet als Multiplikator: Das Seed wird mit der Konstanten multipliziert, und die letzten acht Stellen des Produkts bilden unsere erste Zufallszahl. Die zweite Zufallszahl bekommen wir, indem wir die erste Zufallszahl mit der Konstanten multiplizieren und die letzten acht Stellen abschneiden – und so weiter. Ein Beispiel:

Seed: 15328474
Konstante: 14
Produkt: $15328474 \cdot 14 = 214598636$
Erste Zufallszahl: 14598636
Zweite Zufallszahl: 4380904
Dritte Zufallszahl: 61332656 usw.

Doch leider wiederholt sich auch die *Zufallsfolge* irgendwann einmal (vielleicht nach einigen Milliarden Zahlen – und der zufällige Eindruck ist hin. Heutige Computersimulationen auf Parallelrechnern, benötigen dermaßen viele Zufallszahlen, dass herkömmliche Zufallsgeneratoren zu ihrer Produktion nicht ausreichen. Eine eigene Richtung der Computermathematik erfindet deshalb immer neue Methoden, lange Reihen von Zufallszahlen zu produzieren. Kürzlich wurde ein Algorithmus veröffentlicht, der eine Zufallsreihe von 10^{250} Zahlen ausrechnen kann. Dennoch: Auch diese Reihe hat ein Ende, geht sodann von vorne los, und der Zufall ist perdu.

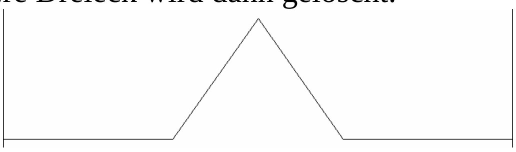
Um Zufälle in ihr Programm einzubauen, schließen manche Leute physikalische Geräte, in denen Zufallsprozesse stattfinden, an den Rechner an: Elektronenröhren oder radioaktive Quellen. Allein das macht deutlich, dass echter Zufall nicht aus dem Computer kommen kann (aber ist das, was in den angeschlossenen Geräten stattfindet, *echter Zufall*?).

[3] Der klassische Determinismus nimmt an, alle Ereignisse seien durch ihre Ursachen mit absoluter Genauigkeit bestimmt; Zufall ist für uns nur der Ausdruck unseres Unwissens über diese Ursachen, Wahrscheinlichkeit das Maß dieses Unwissens. Wir können den Fall der Roulette-Kugel nur deshalb nicht exakt bestimmen, weil wir nicht alle Vorgänge berechnen können, die auf sie einwirken.

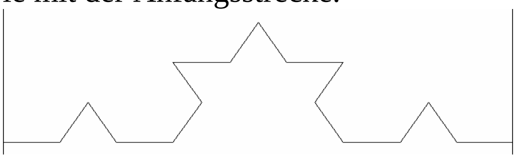
Fraktale Gebilde

Wir sind Kurven bzw. Grafen gewohnt, bei denen ein beliebiger Ausschnitt, genügend vergrößert, fast als Gerade erscheint. Darauf beruht die Möglichkeit, sie mit der Differenzialrechnung zu behandeln. Fraktale Kurven haben diese Eigenschaft nicht. Die Bezeichnung *Fraktale* wurde aus dem lateinischen frangere = brechen abgeleitet.

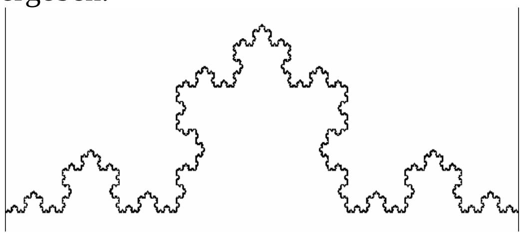
Einige Beispiele „fraktaler" Kurven sind in der Mathematik seit langem bekannt, jedoch in ganz anderem Zusammenhang. Der Mathematiker WEIERSTRAß[4] fand vor etwa 100 Jahren eine Kurve, die stetig[5] ist (d.h. ein nicht unterbrochener Kurvenzug), aber trotzdem in keinem ihrer Punkte differenzierbar[2]. Sie ist - in moderner Sprechweise - fraktal. Eine leicht verständliche Kurve dieser Art fand der Mathematiker VON KOCH um 1900. Sie wurde nach ihm benannt. Sie entsteht auf folgende Weise:
Gegeben ist eine Strecke. Sie wird gedrittelt und über dem mittleren Drittel ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Das mittlere Dreieck wird dann gelöscht.



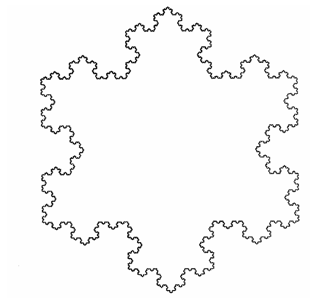
So entstehen vier gleich lange Strecken, mit denen jeweils dasselbe gemacht wird wie mit der Anfangsstrecke.



Mit allen nun entstandenen Strecken macht man wieder dasselbe, usw. Es wird also eine Art Iteration vorgenommen. Die Zeichnung kann das nur unvollständig wiedergeben.



Beginnt man statt mit einer Strecke schon mit einem gleichseitigen Dreieck, so entsteht ein schneeflockenähnliches Gebilde, weshalb die Kurve auch als *Schneeflocken-*



kurve bezeichnet wird.

Die Koch-Kurve hat auffällige Eigenschaften:

> Sie ist *unendlich* lang, obwohl sie als geschlossene Kurve, also vom gleichseitigen Dreieck ausgehend, eine *endliche* Fläche umschließt.

Dass sie unendlich lang ist, ergibt sich wie folgt:
Die Länge der Ausgangsstrecke sei die Längeneinheit. Im ersten Iterationsschritt entsteht ein um 1/3 Längeneinheiten längerer Streckenzug, er ist also 4/3-mal so lang wie die Ausgangsstrecke. Da beim nächsten Schritt jedes Teilstück im selben Verhältnis vergrößert wird, wird auch der ganze Streckenzug erneut 4/3-mal so groß. Dasselbe geschieht bei jedem Iterationsschritt. Daher bilden die Längen der entstehenden Streckenzüge die Folge mit den Folgegliedern $1,\ \frac{4}{3},\ (\frac{4}{3})^2, \ldots$ Diese Folge strebt also gegen ∞.

---

[4] Karl Weierstraß, 1815-1897 Gymnasiallehrer für Mathematik.
[5] In diesem Zusammenhang werden die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit auf die Kurve bzw. auf deren Punkte angewendet.

Übungen: Bedingte Wahrscheinlichkeit

A und *B* seien Ereignisse aus einem Ergebnisraum *S* mit *P(A)* > 0. $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ heißt Wahrscheinlichkeit von *B* unter der Bedingung *A*.

Statt "$P_A(B)$" wird gelegentlich auch "$P(B/A)$" geschrieben.

Es gilt die allgemeine *Pfadmultiplikationsregel* in der Form:
Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Ereignisse eines Ergebnisraumes *S* (Ereignisse längs des "Pfades": $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, dann gilt: $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$

1. Eine Urne U_1 enthält 9 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 9, eine Urne U_2 enthält 5 Kugeln mit den Ziffern 1 bis 5. Aus einer der beiden Urnen wird eine Kugel gezogen. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
   1.1. A : die gezogene Zahl ist gerade;
   1.2. B : die gezogene Zahl ist ungerade;
   1.3. C : die gezogene gerade Zahl stammt aus der Urne 1;
   1.4. D : die gezogene ungerade Zahl stammt aus der Urne 2.

2. Von den 1500 Angehörigen eines Betriebes sind 500 Frauen, 1000 Raucher und 200 nicht rauchende Männer.
   2.1. Legen Sie eine Vierfeldertafel an, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau, der sie begegnen, Raucherin ist?
   2.2. Sie sehen jemanden von weitem rauchen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine Frau ist?

3. Aus statistischen Gründen möchte eine Autoversicherung den Anteil der autofahrenden Frauen und Männer einer Bevölkerungsschicht durch Befragung ermitteln. (siehe Tabelle: Männer = A, Autofahrer = B). Ergänzen Sie die Tabelle um die entsprechenden Summen, und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten zu folgenden Ereignissen.
   3.1. Die befragte Person ist männlich (weiblich).
   3.2. Die befragte Person ist Autofahrer (kein Autofahrer).
   3.3. Die befragte Person ist männlicher (weiblicher) Autofahrer.
   3.4. Unter den männlichen (weiblichen) befragten Personen ist ein Autofahrer.

	A	$\overline{A}$	
B	400	150	
$\overline{B}$	100	350	

4. Aus einer Urne mit drei blauen und zwei grünen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln ohne (mit) Zurücklegen gezogen. A sei das Ereignis, dass beim ersten Zug eine blaue Kugel gezogen wird, B das Ereignis, dass eine grüne Kugel beim zweiten Zug gezogen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer blauen Kugel eine grüne zu ziehen?
5. Die Urne enthält eine weitere rote Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer blauen und grünen Kugel die rote Kugel zu ziehen?

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Übungen: Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ sei eine Zerlegung des Ergebnisraumes S mit $P(B_j) > 0$ für $j = 1,2,...,n$.
A sei ein Ereignis aus S. Dann gilt:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)$$ Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)}$$ Satz von Bayes $(i = 1,2,\ldots,n)$

Im Satz von Bayes fragt man nicht nach der Wahrscheinlichkeit eines noch zu erwartenden Ereignisses, sondern geht von einem bereits eingetretenen Ereignis A aus. Gefragt wird, unter welcher Wahrscheinlichkeit eines der Ereignisse B_i , $i = 1,...,m$, unter dieser Voraussetzung ebenfalls eingetreten ist und insofern als "Ursache" für das Eintreten von A in Betracht kommt.

1. In einer Bevölkerung sind 0,1% aller Personen Tbc-krank. Ein medizinischer Test zur Tbc-Erkennung zeigt in 95% aller Fälle eine vorliegende Erkrankung an. Bei Gesunden zeigt der Test in 4% aller Fälle allerdings irrtümlich eine Erkrankung an. Aus der Bevölkerung wird eine Person zufällig ausgewählt.
   1.1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reagiert Sie beim Test positiv?
   1.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat eine positiv reagierende Person tatsächlich Tbc?

2. Die Schraubenproduktion einer Firma ist zu 20%, 30% und 50% auf drei Maschinen verteilt. Die Maschinen arbeiten mit einem Ausschussanteil von 2%, 4% und 6%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine der Gesamtproduktion zufällig entnommene Schraube Ausschuss?

3. Die in einem Werk produzierten Fernsehgeräte werden vor der Auslieferung von einem der drei Kontrolleure geprüft. Der erste Kontrolleur prüft 50%, der zweite und dritte je 25% der Geräte. Die Sicherheit, vorhandene Mängel zu entdecken, beträgt beim ersten Kontrolleur 0,7, bei den anderen je 0,9. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde ein fehlerhaftes Fernsehgerät, das die Kontrolle passiert hat und als fehlerhaft erkannt wurde, vom ersten Kontrolleur geprüft?

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Zufallsgeneratoren – Zufallszahlen

Der Zentralbegriff der Informatik ist der *Algorithmus* – ein *Schritt für Schritt* ablaufendes Verfahren, das am *Ende* die Lösung eines Problems findet. Algorithmen sind vollständig *determiniert*[6], sie sind geradezu das Sinnbild des Bestimmten, der Abwesenheit von Zufälligem. Computer sind Maschinen, die Algorithmen abspulen. Das bedeutet auch, dass Computer durch und durch determinierte Maschinen sind. Sie können gar keine echten Zufallszahlen produzieren. Die von Computern produzierten Zufallszahlen liefern in Wahrheit nur Werte, deren Zustandekommen determiniert ist – bloß ihre Verteilung ist höchst unübersichtlich.

Ein verbreiteter Zufallsgenerator funktioniert so: Der Programmierer legt eine zum Beispiel achtstellige Zahl fest, die als „Seed“ (Samenkorn) bezeichnet wird. Eine zweite Zahl, die Konstante, arbeitet als Multiplikator: Das Seed wird mit der Konstanten multipliziert, und die letzten acht Stellen des Produkts bilden unsere erste Zufallszahl. Die zweite Zufallszahl bekommen wir, indem wir die erste Zufallszahl mit der Konstanten multiplizieren und die letzten acht Stellen abschneiden – und so weiter. Ein Beispiel:

Seed: 15328474
Konstante: 14
Produkt: $15328474 \cdot 14 = 214598636$
Erste Zufallszahl: 14598636
Zweite Zufallszahl: 4380904
Dritte Zufallszahl: 61332656 usw.

Doch leider wiederholt sich auch die *Zufallsfolge* irgendwann einmal (vielleicht nach einigen Milliarden Zahlen – und der zufällige Eindruck ist hin. Heutige Computersimulationen auf Parallelrechnern, benötigen dermaßen viele Zufallszahlen, dass herkömmliche Zufallsgeneratoren zu ihrer Produktion nicht ausreichen. Eine eigene Richtung der Computermathematik erfindet deshalb immer neue Methoden, lange Reihen von Zufallszahlen zu produzieren. Kürzlich wurde ein Algorithmus veröffentlicht, der eine Zufallsreihe von 10^{250} Zahlen ausrechnen kann. Dennoch: Auch diese Reihe hat ein Ende, geht sodann von vorne los, und der Zufall ist perdu.

Um Zufälle in ihr Programm einzubauen, schließen manche Leute physikalische Geräte, in denen Zufallsprozesse stattfinden, an den Rechner an: Elektronenröhren oder radioaktive Quellen. Allein das macht deutlich, dass echter Zufall nicht aus dem Computer kommen kann (aber ist das, was in den angeschlossenen Geräten stattfindet, *echter Zufall*?).

[6] Der klassische Determinismus nimmt an, alle Ereignisse seien durch ihre Ursachen mit absoluter Genauigkeit bestimmt; Zufall ist für uns nur der Ausdruck unseres Unwissens über diese Ursachen, Wahrscheinlichkeit das Maß dieses Unwissens. Wir können den Fall der Roulette-Kugel nur deshalb nicht exakt bestimmen, weil wir nicht alle Vorgänge berechnen können, die auf sie einwirken.

Glossar: Wahrscheinlichkeiten

A–Priori–Wahrscheinlichkeit
Der Ausdruck $P(A_i)$ im Zähler der →*Bayes´schen Formel*: Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i , bevor die Beobachtung B gemacht wurde. „Bayesianer" berücksichtigen mit $P(A_i)$ das Vorwissen um die Wahrscheinlichkeit von A_i ; sie korrigieren es mithilfe der Beobachtung B gemäß der Bayes´schen Formel. Kritiker der Bayes´schen Formel bemängeln, dass die Quellen der a–prori–Wahrscheinlichkeit subjektiv sind (Schätzungen, Meinungen, Ideologien, Gefühle).

Additionsregel
Mit der Additionsregel können wir die Wahrscheinlichkeit berechnen, mit der das Ereignis A oder B auftritt: $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$. Die Regel gilt auch, wenn $P(A)$ und $P(B)$ verschieden groß sind. Wenn wir diese Additionsregel auf Ereignisse A und B anwenden, die sich gegenseitig ausschließen, dann ist zu beachten, dass $P(A) \cdot P(B)$ nach der →*Multiplikationsregel* gleichbedeutend ist mit $P(A \text{ und } B)$, sodass in diesen Fällen $P(A) \cdot P(B) = 0$ gilt. Mit anderen Worten: Wenn A und B sich gegenseitig ausschließen, gilt die Regel $P(A \text{ oder } B) = P(A) + P(B)$.

Algorithmus
Der Algorithmus ist der Zentralbegriff der Informatik. Darunter ist ein Schritt für Schritt ablaufendes Verfahren zu verstehen, das einen Anfangswert (z.B. eine Zahl oder eine Frage) in einen Endwert (z.B. eine Zahl oder eine Antwort) umwandelt. Computer sind Maschinen, die Algorithmen abspulen.

Bayes´sche Formel
Mithilfe der Bayes´schen Formel können wir aus Beobachtungen auf Wahrscheinlichkeiten schließen. Die Formel lautet:

$P_B(A_i) = \dfrac{P(A_i) \cdot P_{A_i}(B)}{\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)}$, wobei die einzelnen Ausdrücke dies bedeuten:

- $P_B(A_i)$ Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i im Lichte der Beobachtung des Ereignisses B.
- $P(A_i)$ Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A_i vor der Beobachtung des Ereignisses B (→*a–priori–Wahrscheinlichkeit*).
- $P_{A_i}(B)$ Die Wahrscheinlichkeit, mit der A_i das Ereignis B hervorbringt.
- $\sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)$ Alle Möglichkeiten, dass Ereignisse von A_1 bis A_j das Ereignis B hervorbringen.

bitte wenden

Bedingte Wahrscheinlichkeit
Wir schreiben $P_A(B)$ und meinen damit: Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *B*, wenn *A* vorliegt.

Gesetz der großen Zahl
Je größer die Stichprobe, desto genauer entspricht die Verteilung der Werte in der Stichprobe der Verteilung der Gesamtpopulation. Für Versuche mit einer Münze lässt sich dieses Gesetz beispielsweise so formulieren: Je öfter ich die Münze werfe, desto genauer wird die Schätzung *P*(Kopf) = ½.

Heuristik
Eine erkenntnisfördernde Daumenregel – z.B. „Drum prüfe, wer sich ewig bindet...“

Multiplikationsregel
Die Wahrscheinlichkeit des gemeinsamen Auftretens zweier voneinander unabhängiger Ereignisse ist gleich dem Produkt ihrer Wahrscheinlichkeiten: $P(A\ und\ B) = P(A) \cdot P(B)$. Voneinander unabhängige Ereignisse sind zum Beispiel die Würfel-Augenzahlen zweier Würfe (oder eines Wurfes mit zwei Würfeln).

Totale Wahrscheinlichkeit
Die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit: $P(B) = \sum_{j=1}^{n} P_{A_j}(B) \cdot P(A_j)$ beschreibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Ereignis *B* (z.B. eine Wirkung) aus einer Menge von anderen Ereignissen A_1 bis A_n (z.B. Ursachen) folgt.

Wahrscheinlichkeit
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses *A*, geschrieben *P(A)*, gibt an, wie sehr wir auf das Eintreten dieses Ereignisses vertrauen dürfen. Dies ist nur eine von vielen möglichen Definitionen des umstrittenen Begriffes Wahrscheinlichkeit – mithin die einfachste. Die Urformel der Wahrscheinlichkeit lautet:

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

- *P* steht für Wahrscheinlichkeit (probability).
- *A* ist das Ereignis, nach dem gefragt wird.
- *P(A)* ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A*.
- N_A ist die Anzahl der Ergebnisse, nach denen gefragt wird.
- *N* ist die Anzahl aller gleich wahrscheinlichen Ergebnisse.

Übungen: Zuverlässigkeitstheorie

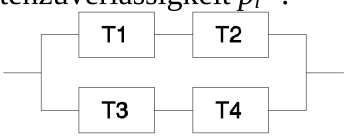
In der Zuverlässigkeitstheorie heißt ein komplexer Gegenstand (Auto, Fernseher, Rakete) ein *System*. Die Teile heißen *Komponenten*. Eine Komponente kann arbeiten oder ausfallen. Das Ziel von Berechnungen ist es, die Zuverlässigkeit des Systems aus der Zuverlässigkeit der Komponenten zu bestimmen. Man versteht dabei unter Zuverlässigkeit eines Systems (einer Komponente) die Wahrscheinlichkeit, dass das System (die Komponente) arbeitet. Im Folgenden ist stets von voneinander unabhängigen Komponenten (Bauteilen) die Rede.

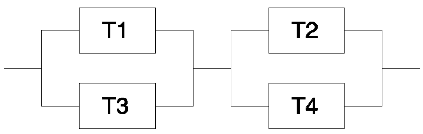
Unter einem *Reihensystem* versteht man ein System, das genau dann arbeitet, wenn jeder Teil arbeitet.
Unter einem *Parallelsystem* versteht man ein System, das genau dann arbeitet, wenn mindestens ein Teil arbeitet.

Aufgaben:

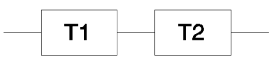
1. Gegeben sei ein System aus n Komponenten mit der Zuverlässigkeit p_i für i = 1,2,...n. Zeigen Sie:
   1.1. Ist das System ein Reihensystem, dann arbeitet es mit der Zuverlässigkeit $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.
   1.2. Ist das System ein Parallelsystem, dann arbeitet es mit der Zuverlässigkeit $1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$, wobei $q_i = 1 - p_i$ für $i = 1,2,\ldots,n$ ist.

2. Mit weicher Zuverlässigkeit arbeiten die abgebildeten Systeme mit der Komponentenzuverlässigkeit p_i ?



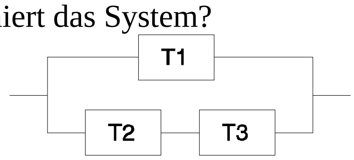


3. Man will die Zuverlässigkeit des abgebildeten Systems erhöhen. Es werden zwei Methoden erwogen:



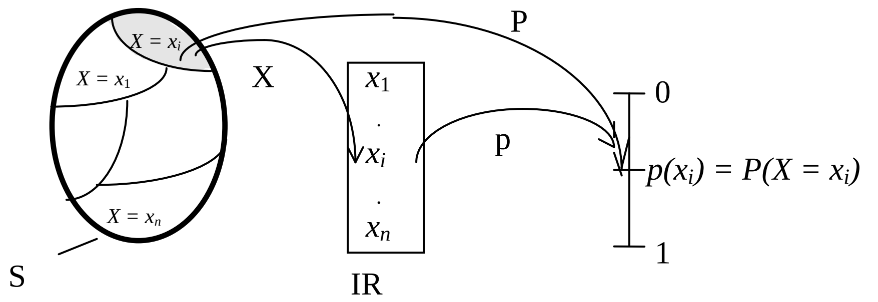
   3.1. Dem System wird ein identisches System parallel geschaltet.
   3.2. Zu jedem Teil wird ein Teil zur Reserve parallel geschaltet. Was ist besser: Verdopplung der Teile oder Verdopplung des Systems?

4. Ein Gerät besteht aus drei Bauteilen T_1 , T_2 und T_3 , die mit der Wahrscheinlichkeit von 95%, 90% und 85% unabhängig voneinander funktionieren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit funktioniert das System?



Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Übungen: Zufallsvariablen und Erwartungswert



S :	Ergebnisraum eines Zufallsversuches (z.B. Ausgänge eines Spiels).
$P: S \to [0;1]$	Wahrscheinlichkeitsfunktion über S (z.B. rel. Häufigkeiten der Ausgänge).
$X: S \to \mathrm{IR}$	Zufallsvariable (z.B. Zuweisung des Gewinnbetrages zu Spielausgängen).
$X[S] = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$	Menge der Werte von X (im endlichen Fall).
$(X = x_i) = \{e_i \in S \mid X(e_i) = x_i\}$	Menge der Versuchsergebnisse, denen durch X der gleiche Wert x_i (z.B. Gewinn) zugeordnet wird.
$P: X[S] \to [0;1]$	Wahrscheinlichkeitsfunktion (-verteilung) der Zufallsvariablen X.
$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen X. Andere Schreibweisen: $\mu(X)$, μ_x.

<u>Anmerkungen:</u>

Der Erwartungswert einer Zufallsgröße ist das mit ihren Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der Werte der Zufallsgröße, d.h., der mittlere Wert der Zufallsgröße pro Versuch auf lange Sicht. Ist P die Wahrscheinlichkeitsfunktion eines Laplaceversuches, d.h. $P(X = x_i) = k_i / |S|$, wobei k_i die Anzahl der Ergebnisse aus S ist, denen durch X der Wert x_i zugeordnet wird, dann ist der Erwartungswert $\mu(X)$ gerade der Mittelwert der x_i Werte: $\mu(X) = \bar{x}$.

<u>Aufgaben:</u>

Stellen Sie eine Verteilungstabelle auf und berechnen Sie den Erwartungswert. Entscheiden Sie ggf., ob das Spiel „günstig“, „ungünstig“ oder „fair“ ist. (Gewinn = Auszahlung minus Einsatz; Verlust = negativer Gewinn).

1. Viermaliges Werfen einer Münze; Gewinn = Anzahl der K´s – Anzahl der Z´s; Mit Stabdiagramm und Histogramm.

bitte wenden

2. Ein Spieler zahlt 1 DM Einsatz und wirft dreimal einen Laplacewürfel. Erscheint die 6 ein-, zwei- oder dreimal, so erhält er seinen Einsatz zurück und außerdem einen Gewinn von 1 DM, 2 DM bzw. 3 DM. Erscheint keine 6, so ist der Einsatz verloren.

3. Würfeln mit einem Würfel: Je 1 DM Gewinn bei den Augenzahlen 1 und 5, 3 DM bei der Augenzahl 6. Je 2 DM Verlust bei den Augenzahlen 2 und 4. Fällt die Augenzahl 3, so ergibt sich kein Gewinn (0 DM).

4. In einem Reihensystem von sechs Bauteilen mit den Reihennummern 1 bis 6, die alle gleich zuverlässig sind, fällt genau eins aus. Um es zu finden, gibt es zwei Verfahren, von denen das mit der im Mittel kleineren Anzahl der Testschritte günstiger ist. Vergleichen Sie die beiden Verfahren:
   4.1. Die Bauteile werden der Reihe nach einzeln getestet.
   4.2. Es wird eine Dreiergruppe von Bauteilen als Ganzes getestet (die ersten drei, ggf. die folgenden drei), danach dann die drei, unter denen sich das defekte Bauteil befindet, einzeln.

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Übungen: Die Ungleichung von TSCHEBYSCHOW[7]

Für jede Zufallsgröße X mit einem Erwartungswert μ und einer Varianz σ^2 gilt mit $a > 0$:

$$P(|X-\mu| \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2}$$

Variante: $$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \qquad \text{mit } k > 0$$

Interpretation: Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zufallsgröße X mit der Standardabweichung σ um mehr als $k\sigma$ von ihrem Erwartungswert μ abweicht, ist kleiner als $\frac{1}{k^2}$.

Wiederholung:

X sei eine Zufallsgröße mit den Werten x_i und der Wahrscheinlichkeitsfunktion P.

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$ heißt Erwartungswert, $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P(x_i)$ heißt Varianz und σ Standardabweichung der Zufallsgröße X.

Schreibweisen: $E(X) = \mu(X) = \mu_X = \mu, \sigma = \sigma(X) = \sigma_X, \sigma^2 = \mathrm{VAR}(X) = \mathrm{V}(X)$

Aufgaben:

1. Man leite aus der Ungleichung von TSCHEBYSCHOW her und interpretiere:

$$P(|X-\mu| < a) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2} \qquad \text{bzw.} \qquad P(|X-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

2. $U_{k\sigma}(\mu) = \left\{x_i \in \mathrm{IR} \mid |x_i - \mu| < k\sigma\right\}$ sei die Menge der Werte einer Zufallsgröße X in der $k\sigma$–Umgebung des Erwartungswertes. σ sei deren Standardabweichung. Man zeige: In dem Bereich:
   2.1. $U_{2\sigma}(\mu)$ sind durchschnittlich mindestens 75%
   2.2. $U_{3\sigma}(\mu)$ sind durchschnittlich mindestens 89%
   2.3. $U_{4\sigma}(\mu)$ sind durchschnittlich mindestens 93,75%

aller Werte x_i der Zufallsgröße X zu erwarten !

3. Eine Fabrik stellt Metallbolzen her; der Erwartungswert für den Querschnitt beträgt 4,8 mm², die Standardabweichung σ = 0,015mm². Wie groß ist höchstens die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Abweichung 0,05 mm² oder mehr beträgt ? D.h.: Bei höchstens wie viel Prozent der Bolzen muss die Firma mit Bolzen außerhalb des Toleranzbereiches rechnen?

4. Eine Firma stellt Stahlkugeln her; der Erwartungswert des Kugeldurchmessers beträgt μ = 8,5mm, die Standardabweichung σ = 0,02mm. Welche Abweichung vom Erwartungswert muss die Firma zulassen, wenn der Ausschuss höchstens 5% betragen soll?

5. Frauen haben eine mittlere Körpergröße von 165cm bei einer Streuung von 2cm. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Frau größer als 168cm oder kleiner als 162cm?

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

[7] TSCHEBYSCHOW, PAFNUTI LWOWITSCH (1821-1894), russischer Mathematiker auf den Gebieten der Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Normalverteilung

X sei eine Zufallsgröße, $\Phi(x)$ der Term der Gaußschen Integralfunktion. X heißt normal verteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ (kurz: $N(\mu;\sigma)$–verteilt), wenn gilt: $P(X \le x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ bzw. $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ ihre Dichtefunktion ist. Aus der Interpretation von $\Phi(z)$ als Flächeninhalt unter der Gaußschen Glockenkurve ergibt sich die Abschätzung von sog. Intervallwahrscheinlichkeiten. Man beachte $P(X \le x) = P(X < x)$.

Aufgaben:

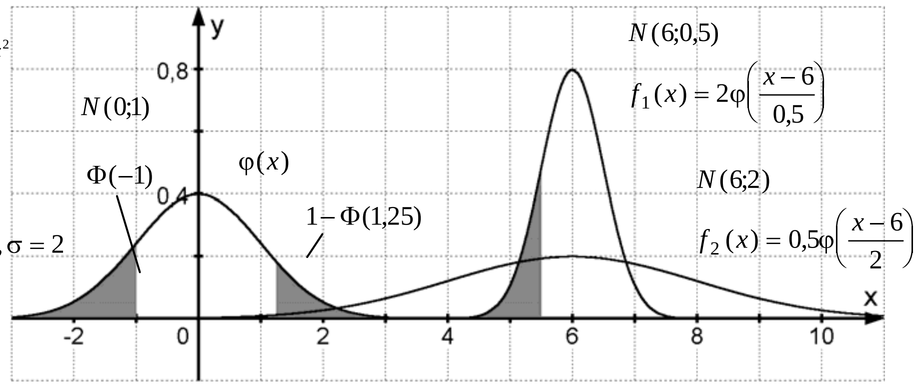
1. X sei $N(\mu;\sigma)$–verteilt (siehe Skizze).
   1.1. Für k = 1,2,3 berechne man die Wahrscheinlichkeit, mit der die Werte von X in der kσ–Umgebung von μ liegen.
   1.2. Mit 50% Wahrscheinlichkeit sollen die Werte von X in der tσ–Umgebung von μ liegen. Wie groß ist t ?
   1.3. Für μ = 6 und σ = 2 berechne man $P(X \le 7)$; $P(X > 6{,}5)$; $P(4{,}5 \le X \le 7)$;.
   $P(|X-6| \le 0{,}5)$; $P(|X-6| > 1)$.

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$x = 8{,}5$

$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$z = 1{,}25$ für $\mu = 6, \sigma = 2$



2. Bei einer Importfirma für Tee füllt eine Maschine Tee in 100g–Päckchen ab. Die Füllmenge ist als normal verteilt zu betrachten mit dem Mittelwert 100g und einer Standardabweichung von 1,5g. Päckchen mit weniger als 98g werden aussortiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt ein Päckchen bei der Gewichtsprüfung durch?

3. Der mittlere Aktionsradius (in km) eines Autotyps wird vom Hersteller unter DIN–Bedingungen mit μ = 400km bei einer Streuung von σ = 10km angegeben. Berechnen Sie unter der Annahme, dass der Radius normalverteilt ist, den Abstand den zwei Tankstellen höchstens haben dürfen, wenn man mit der Wahrscheinlichkeit von 99% diesen Abstand mit einer Tankfüllung fahren will.

4. Die Reißfestigkeit einer Garnsorte wird als normalverteilt angenommen. Zur Ermittlung von μ und σ wurde festgestellt, dass 5% der Proben bei einer Belastung von weniger als 15N und 91% der Proben bei einer Belastung von weniger als 28N rissen. Berechnen Sie μ und σ.

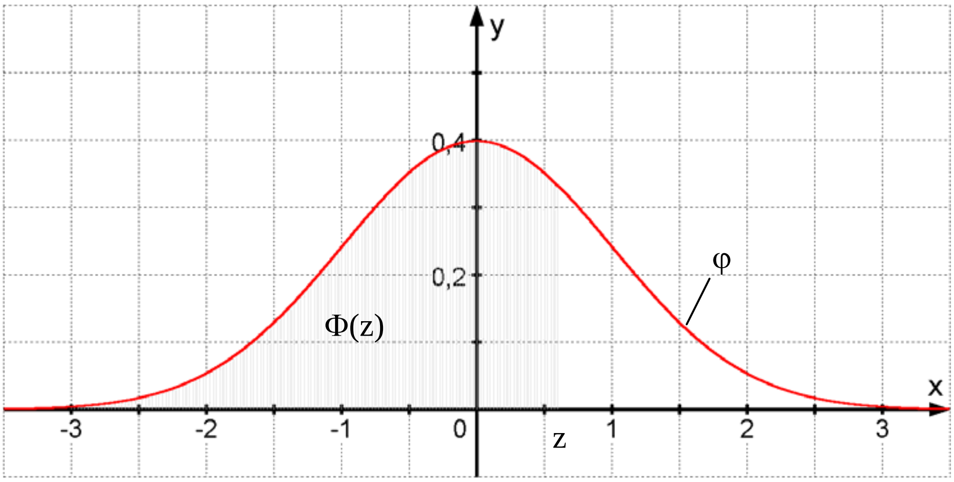
Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Die Gaußfunktion φ und die Gaußsche Verteilungsfunktion Φ

THE
NORMAL
LAW OF ERROR
STANDS OUT IN THE
EXPERIENCE OF MANKIND
AS ONE OF THE BROADEST
GENERALIZATIONS OF NATURAL
PHILOSOPHY AND SERVES AS THE
GUIDING INSTRUMENT IN RESEARCHES
IN THE PHYSICAL AND SOCIAL SCIENCES AND
IN MEDICINE AGRICULTURE AND ENGINEERING +
IT IS AN INDISPENSABLE TOOL FOR THE ANALYSIS AND THE
INTERPRETATION OF THE BASIC DATA OBTAINED BY OBSERVATION AND EXPERIMENT

W.J. Youden

Die *Glockenkurve:*



Standardisiert: N(0;1)–verteilt

Gaußfunktion: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$ „Dichtefunktion“

Gaußsche Summenfunktion: $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$ „Verteilungsfunktion“, $\lim_{z\to\infty} \Phi(z) = 1$

Allgemein: $N(\mu,\sigma)$ –verteilt

Eine stetige Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ heißt *normalverteilt*, wenn ihre Dichtefunktion f gegeben ist durch $f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{x-\mu}{\sigma})$. Man nennt sie $N(\mu,\sigma)$ –verteilt. F mit

$F(z) = \int_{-\infty}^{z} f(x)dx$ ist die zugehörige Verteilungsfunktion.

$F(z) = P(X \le z)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der X–Werte höchsten z annehmen. μ und σ sind definiert durch:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx \text{ und } \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx .$$

F(z) berechnet man nach: $F(z) = \Phi \cdot \left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)$

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg

Capture- und Recapture-Methode

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe vom Umfang n genau k Exemplare der 1. Merkmalsausprägung sind, ist:

$$P(X=k)=\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad k=0,1,\dots,n, \quad k\le K, \quad k\le N-K$$

Sei X eine hypergeometrisch verteilte Zufallsgröße und $p=\frac{K}{N}$ der Anteil, mit dem die 1. Merkmalsprägung in der Gesamtheit vorkommt. Dann gilt für den Erwartungswert:

$$\mu=E(X)=n\cdot p=n\cdot\frac{K}{N}$$

Beispiel für die Anwendung des Erwartungswertes einer hypergeometrisch verteilten Zufallsgröße:

Mithilfe der *capture–recapture* Methode schätzt man, mit welchen absoluten Häufigkeiten bestimmte Tierarten vorkommen. Man fängt z.B. 100 Fische in einem Teich, markiert sie und setzt sie wieder aus. Dann fängt man wieder Fische und zählt die markierten hierunter. Hieraus schätzt man die Anzahl der Fische im Teich.

Ein Zahlenbeispiel: Beim zweiten Fang sind 35 Fische markiert und 127 nicht markiert. Wir kennen den Umfang der Gesamtheit (N) nicht, aber die Anzahl der Merkmalsträger einer Art (der markierten Fische): K = 100

und den Umfang der Stichprobe (zweiter Fang): n = 35+127 = 162.

Der Erwartungswert der Anzahl der markierten Fische beim zweiten Fang ist:

$E(X)=n\cdot\frac{K}{N}$. Schätzt man: $E(X)\approx 35$,

dann ergibt sich: $35\approx 162\cdot\frac{100}{N}$, also

$N\approx 463$.

Aufgaben:

1. Führen Sie die Rechnung des Beispiels durch für folgende Daten:
   1.1. 40 markiert und 120 nicht markiert;
   1.2. 60 markiert und 60 nicht markiert;
   1.3. 50 markiert und 30 nicht markiert.

2. Die Methode zur Schätzung der Anzahl von Fischen werde wie folgt variiert:
   Zunächst werden nicht 100 Fische gefangen und markiert, sondern zusätzlich 100 markierte Fische ausgesetzt. Dann werden Fische gefangen und die markierten hierunter gezählt. Rechnen Sie mit den Zahlen: Beim Fang sind 35 Fische markiert und 127 nicht markiert. Schätzen Sie die ursprüngliche Anzahl von Fischen im Teich.

Quelle: Fachseminar Mathematik, Dr. Lichtenberg