Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

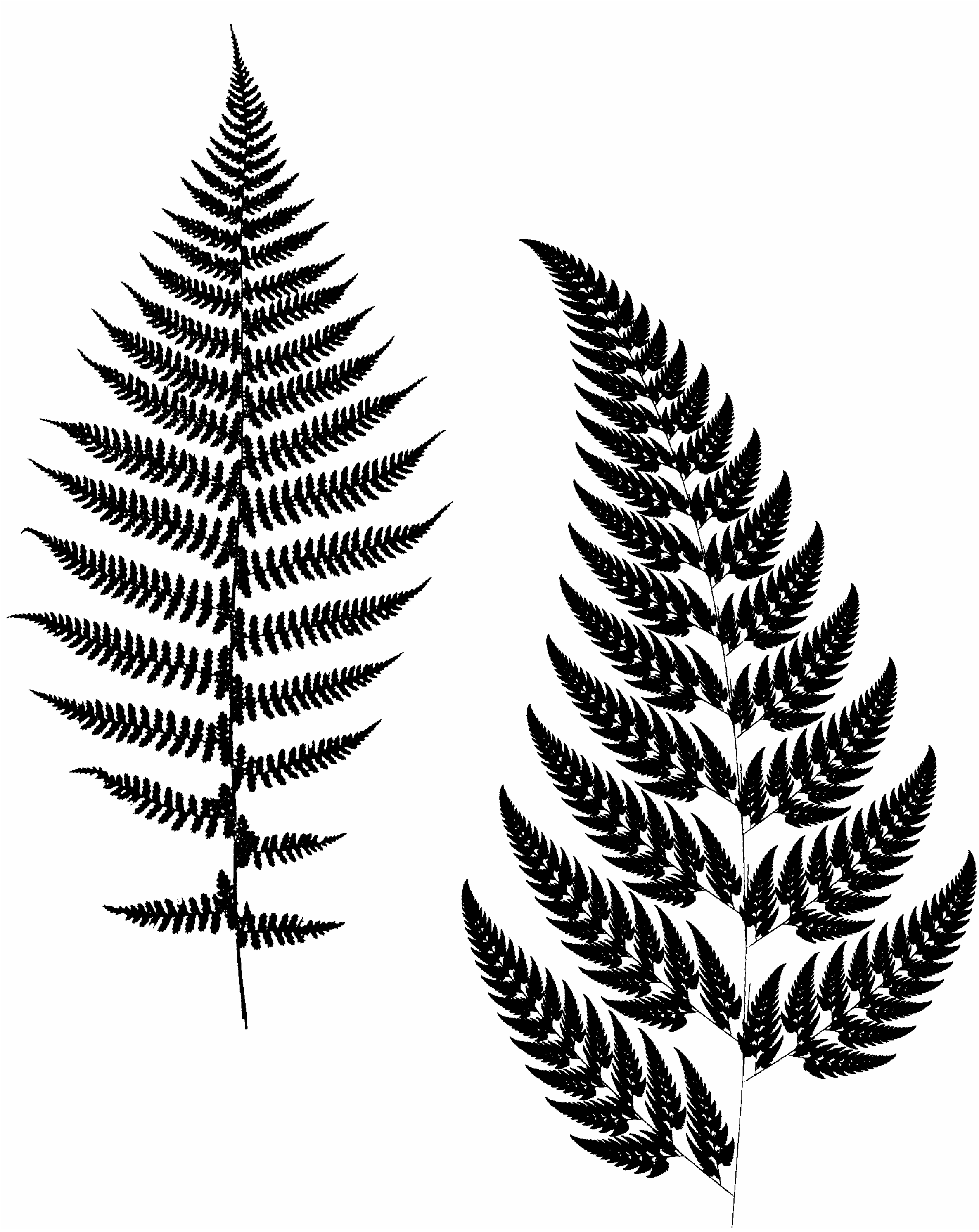
Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 13. Klasse (Teil 2)

Lehnen

Stand 6.2010

Fraktale/Chaostheorie

So schön können komplexe Zahlen sein.



Was ist nun bei der zweiten von uns betrachteten Iteration, $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, bei Ausweitung auf die komplexen Zahlen zu erwarten? Das schon im Reellen viel kompliziertere Geschehen als bei der reinen Quadrierung läßt entsprechende Kompliziertheit im Komplexen erwarten.

Wie bereits erwähnt, übertrifft diese Kompliziertheit jedoch bei weitem auch das, was Mathematiker erwarteten. Die Menge der Scheidepunkte bildet – wie bei der reinen Quadrierung – nun eine geschlossene Kurve, aber eine von fast verwirrender Gestalt. Die Kurve mitsamt der von ihr eingeschlossenen Fläche übernimmt die Rolle des Intervalls $\overline{F_1F_1'}$ im reellen Bereich. Die Beträge aller außerhalb gelegenen Punkte, und nur die dieser Punkte, streben gegen ∞.

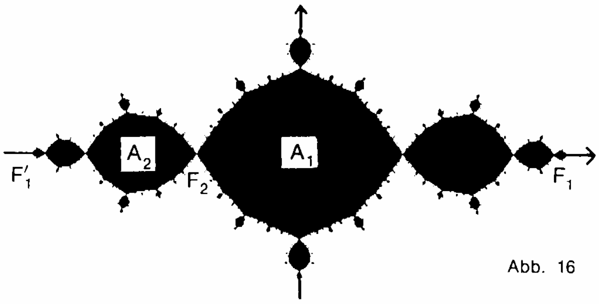


Abb. 16

Der französische Mathematiker Gaston *Julia* hat vor etwa 70 Jahren, damals kaum beachtet, Mengen wie diese Kurve untersucht. Sie heißen nach ihm *Julia-Mengen.* Von solchen Mengen spricht man bei beliebiger Wahl der für die betrachtete Iteration so wichtigen Konstante c, die bei uns den Wert -1 hat.

Der c-Wert ist gleichsam das Samenkorn, das die spätere Gestalt der Menge bestimmt. Man nennt daher solche Zahlen, die das weitere Geschehen bestimmen, auch *seed value* (Samen-Wert).

Bringt man zwei Samenkörner in die Erde, die sich kaum erkennbar unterscheiden, so können sie doch zu ganz unterschiedlichen Pflanzen führen. So führen auch kleinste Unterschiede von c u. U. zu völlig verschieden gestalteten Julia-Mengen.

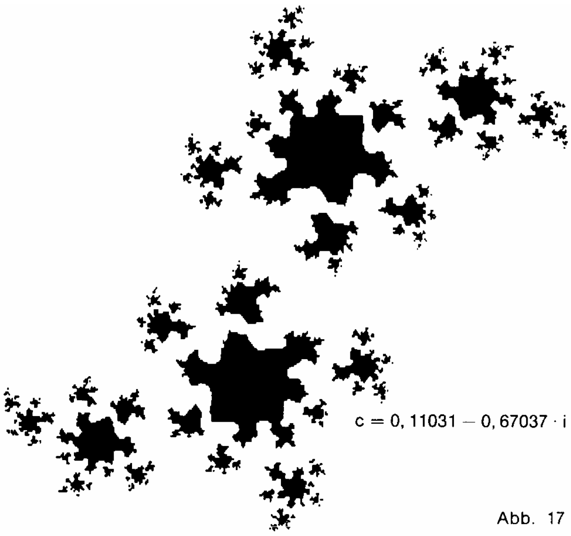


Abb. 17

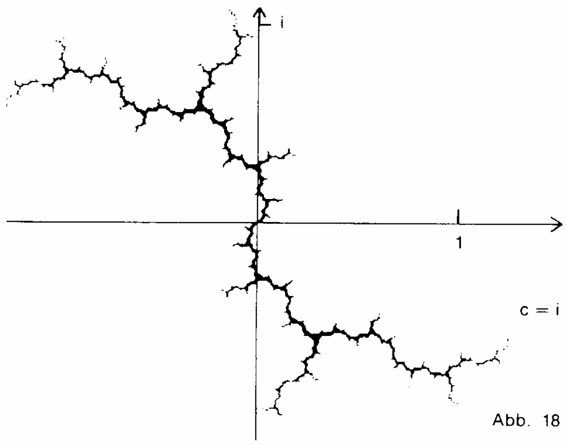


Abb. 18

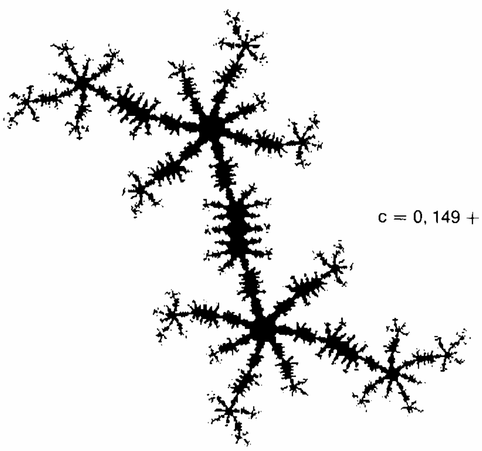
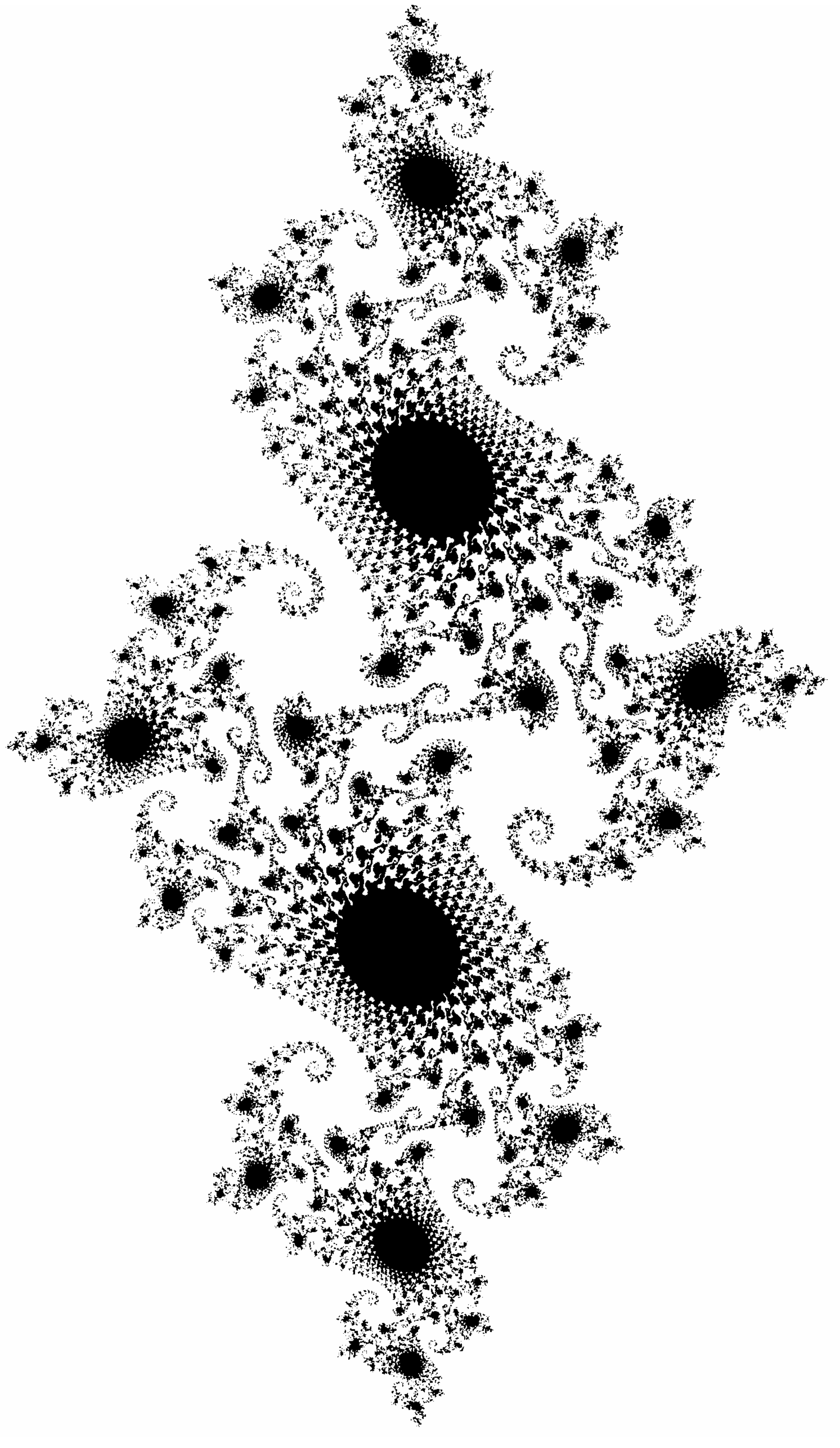


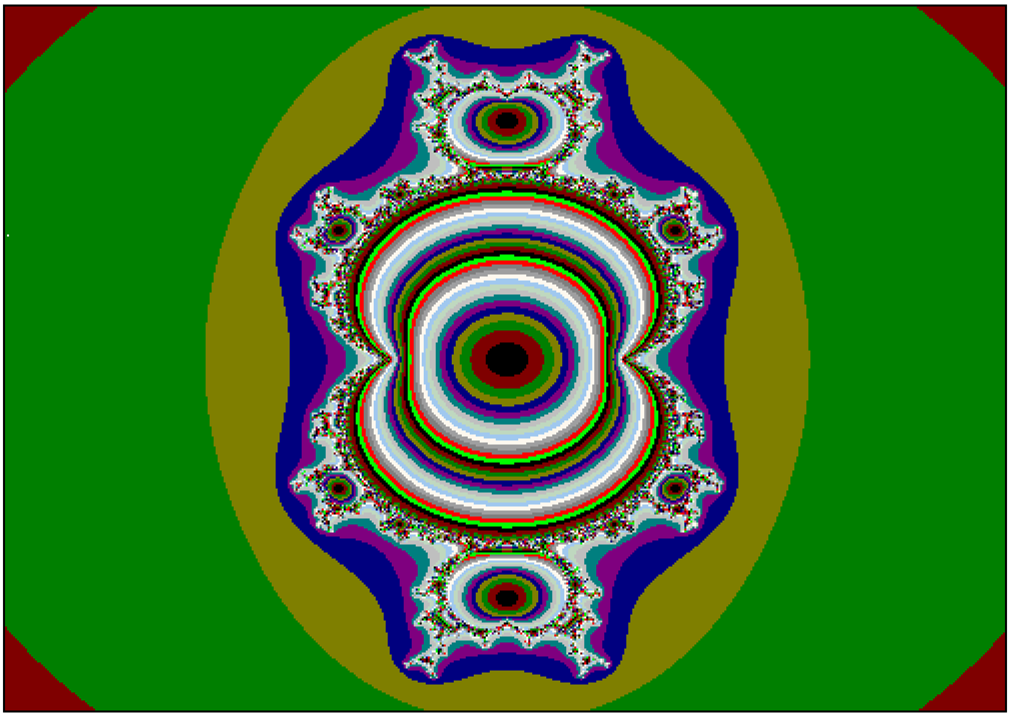
Abb. 19

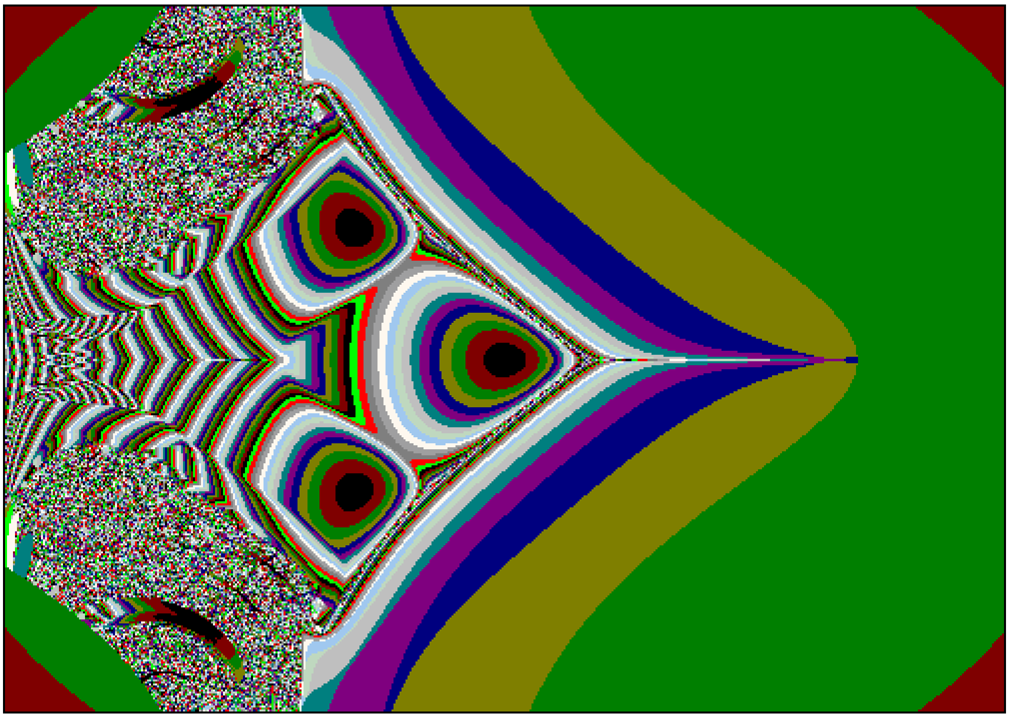
c = -0,74543 + 0,11301 i



Mandelbrotmenge/Mandelbrotsinus

Chaos ist schön!!!





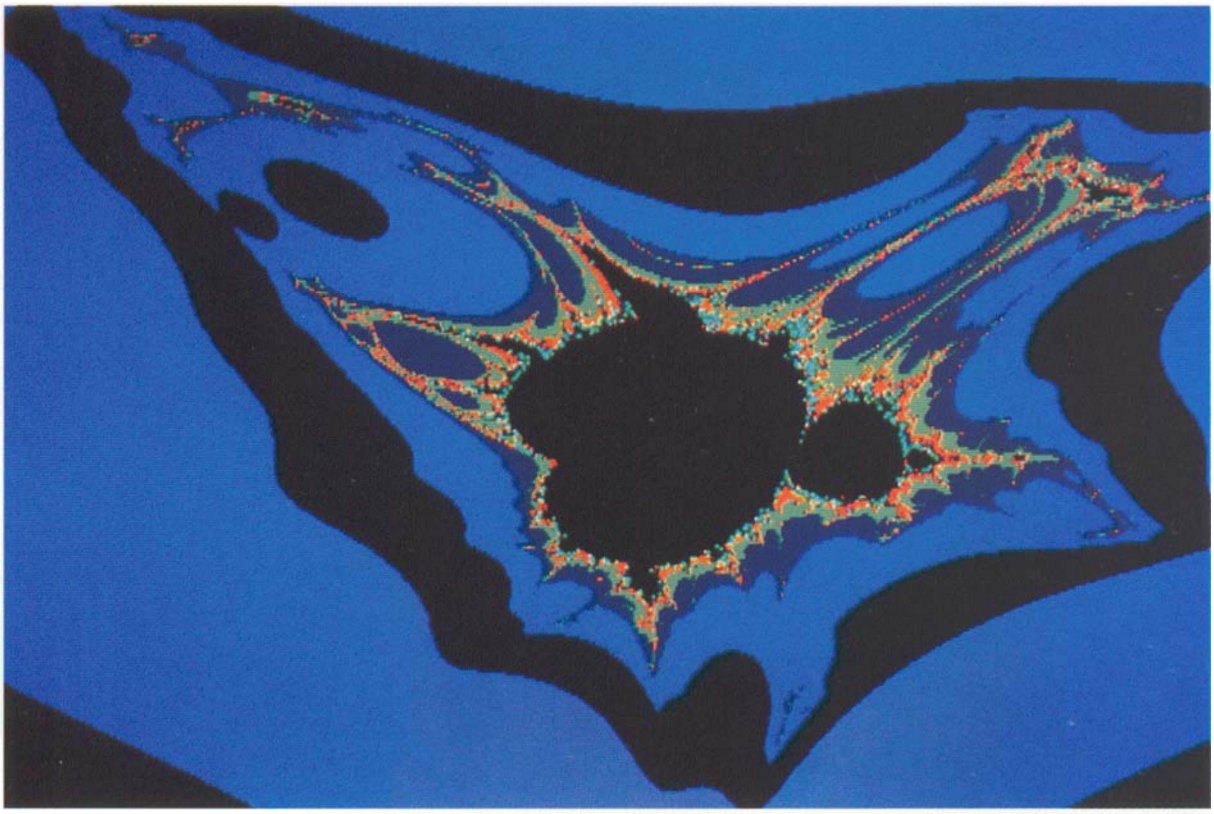
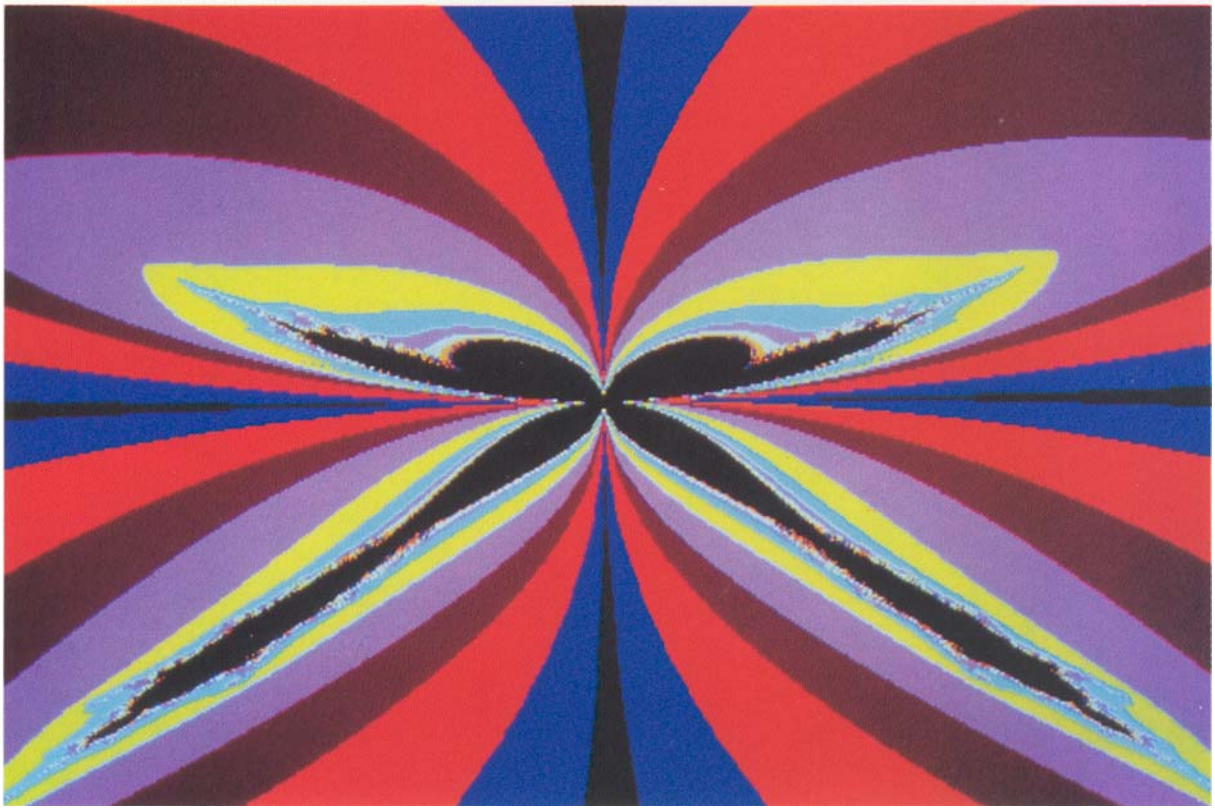


Abb. 27



Apfelmännchen

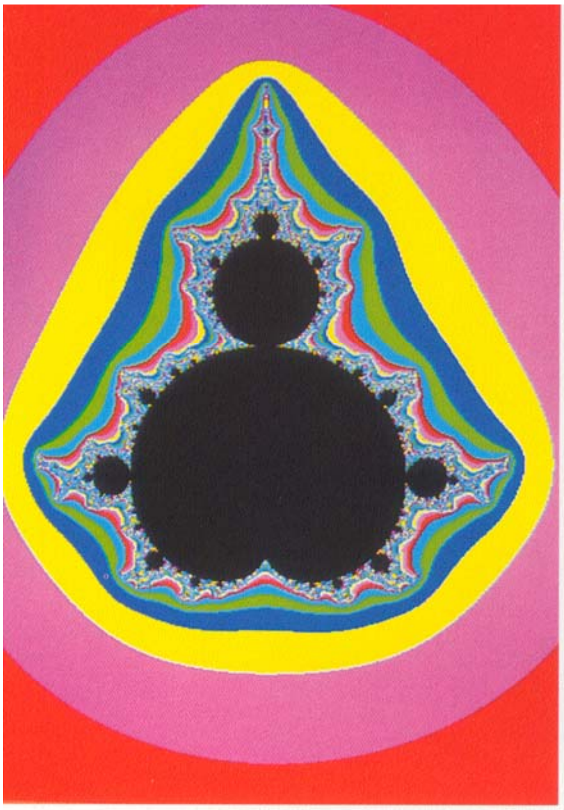


Abb. 37

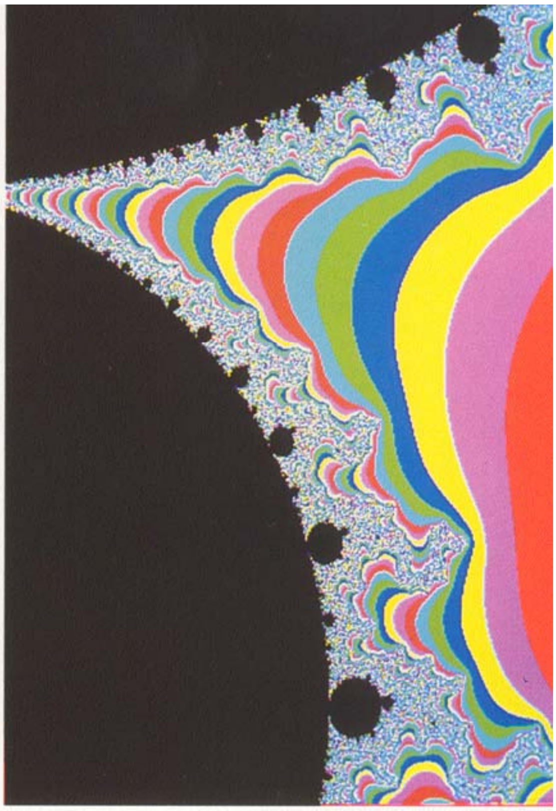
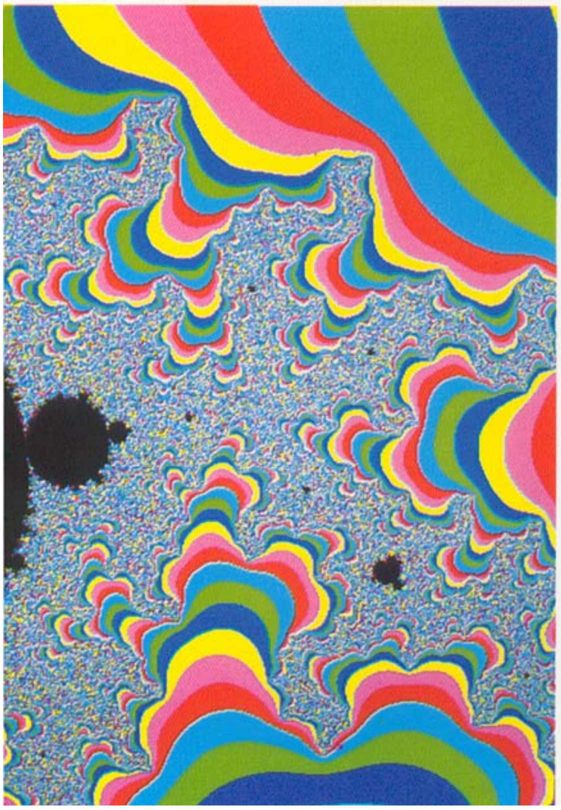
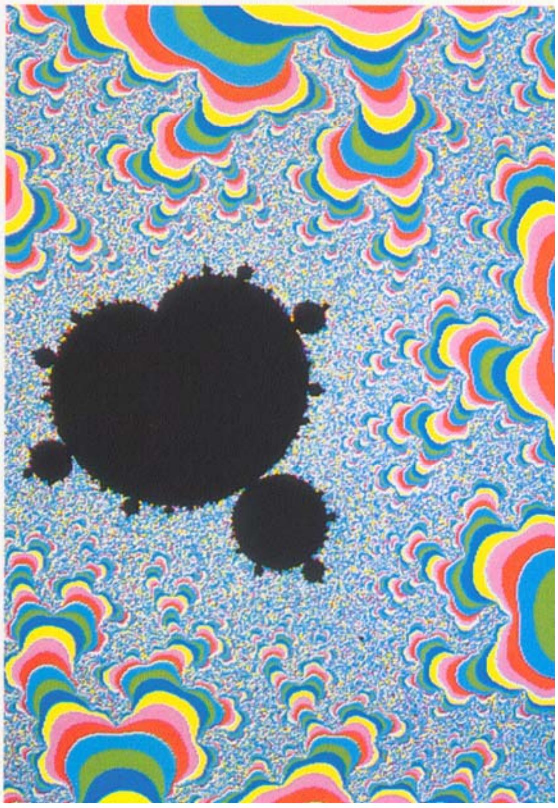


Abb. 3





Komplexe Zahlen

Die erweiterte Iteration mit komplexen Zahlen

–Die Entstehung von Julia Mengen-

Was ist nun bei der zweiten von uns betrachteten Iteration, $a_{n+1} = a_n^2 - 1$, bei Ausweitung auf die komplexen Zahlen zu erwarten? Das schon im Reellen viel kompliziertere Geschehen als bei der reinen Quadrierung läßt entsprechende Kompliziertheit im Komplexen erwarten.

Wie bereits erwähnt, übertrifft diese Kompliziertheit jedoch bei weitem auch das, was Mathematiker erwarteten. Die Menge der Scheidepunkte bildet – wie bei der reinen Quadrierung – nun eine geschlossene Kurve, aber eine von fast verwirrender Gestalt. Die Kurve mitsamt der von ihr eingeschlossenen Fläche übernimmt die Rolle des Intervalls $\overline{F_1F_1'}$ im reellen Bereich. Die Beträge aller außerhalb gelegenen Punkte, und nur die dieser Punkte, streben gegen ∞.

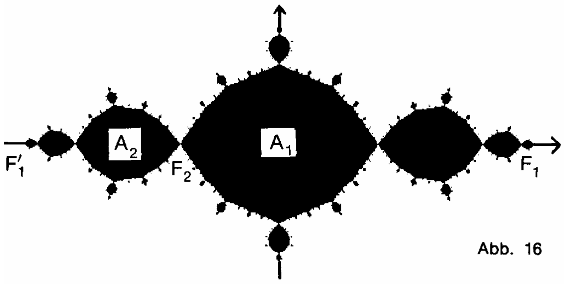
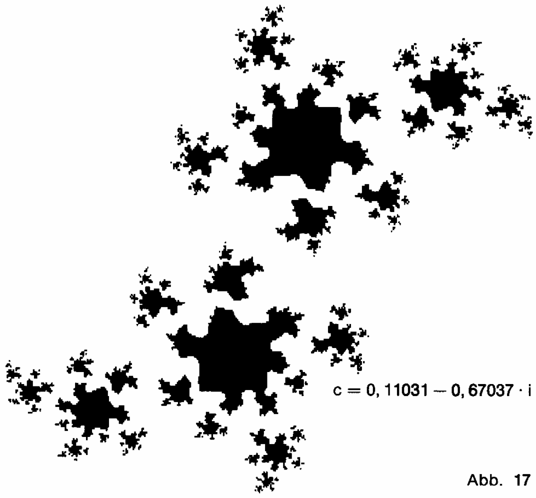


Abb. 16

Der französische Mathematiker Gaston *Julia* hat vor etwa 70 Jahren, damals kaum beachtet, Mengen wie diese Kurve untersucht. Sie heißen nach ihm *Julia-Mengen.* Von solchen Mengen spricht man bei beliebiger Wahl der für die betrachtete Iteration so wichtigen Konstante c, die bei uns den Wert -1 hat.

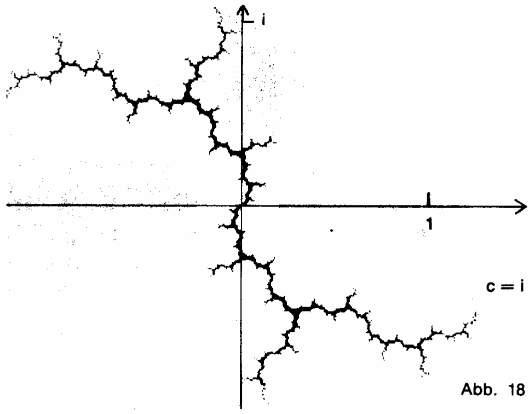
Der c-Wert ist gleichsam das Samenkorn, das die spätere Gestalt der Menge bestimmt. Man nennt daher solche Zahlen, die das weitere Geschehen bestimmen, auch *seed value* (Samen-Wert).

Bringt man zwei Samenkörner in die Erde, die sich kaum erkennbar unterscheiden, so können sie doch zu ganz unterschiedlichen Pflanzen führen. So führen auch kleinste Unterschiede von c u. U. zu völlig verschieden gestalteten Julia-Mengen.



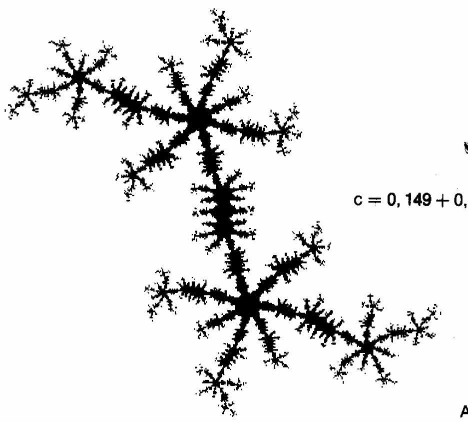
$c = 0,11031 - 0,67037 \cdot i$

Abb. 17



$c = i$

Abb. 18



$c = 0,149 + 0,6557 \cdot i$

Abb. 19

Thema: Komplexe Zahlen

Identifiziert man das Tupel (x,0) mit der reellen Zahl x, so kann man jede komplexe Zahl in folgender Form darstellen:

$z = x + iy \qquad x, y \in \mathrm{IR}$

$\mathrm{Re}(z) := x$ heißt **Realteil** von z

$\mathrm{Im}(z) := y$ heißt **Imaginärteil** von z

Mit komplexen Zahlen rechnet man wie mit reellen Zahlen, man hat nur $i^2 = -1$ zu berücksichtigen.

Man hat folgende Darstellungen einer komplexen Zahl *z:*

$$z = x + iy, \text{ kartesische Darstellung}$$
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ Polarkoordinatendarstellung}$$
$$\mathrm{z} = \mathrm{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \text{ Eulersche Darstellung}$$
$$\mathrm{r} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \text{ heißt Betragvon} z$$
$$\varphi = \mathrm{Arg}(z) \text{ mit } 0 \le \varphi \le 2\pi, \text{ heißt Argument von } z$$
$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad \sin\varphi = \frac{y}{r} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

<u>Übungsaufgaben:</u>

1. Seien $z = 1 + 2i, w = 3 - i$. Man berechne $z + w$ und $z \cdot w$.
2. Berechnen Sie:

2.1 $(1 + i)(1 - i) = z$

2.2 $i(2 - 3i)^2(1 + i) = z$

3. Berechnen Sie Betrag und Argument von:

3.1 $z = -2i$

3.2 $z = \sqrt{3} + 3i$

Komplexe Zahlen – Übungsaufgaben

1. Stellen Sie die komplexen Zahlen als Zeiger in der Gauß´schen Zahlenebene dar.

   a. $z_1 = 2 + 3i$
   b. $z_2 = -3 - i$
   c. $z_3 = -8$
   d. $z_4 = -3 - i$

2. Bestimmen Sie rechnerisch und zeichnerisch $z_1 + z_2$.

   a. $z_1 = 1 + 4i$; $z_2 = 2 - 2i$
   b. $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -3 + i$

3. Ermitteln Sie den Betrag.

   a. $z_1 = 2 - 3i$
   b. $z_2 = \frac{12}{5} + \frac{7}{5}i$
   c. $z_3 = -6 + 4i$

4. Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen in C.

   a. $3x^2 + x - 4 = 2(x^2 + x + 1)$

   b. $9(x - 10) = (2x - 17)x$

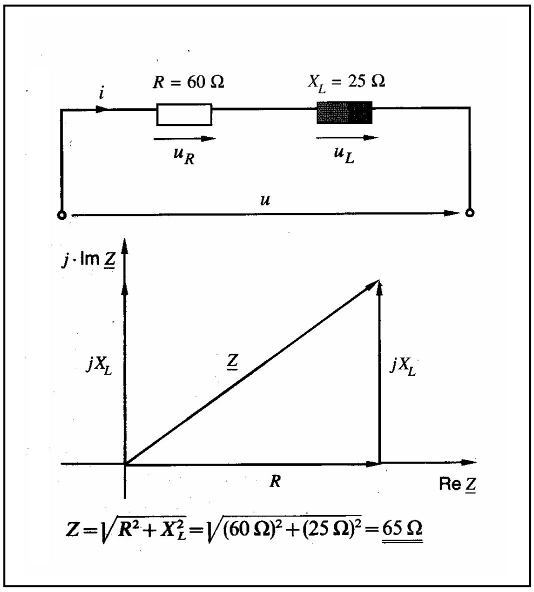
Komplexe Zahlen – Wechselstromtechnik

Ohmscher, induktiver und kapazitiver Widerstand, deren Schaltsymbole, Formelausdrücke sowie die Zeigerdarstellung. Dabei bezeichnet $\omega = 2\pi\, f$ die Kreisfrequenz. Den Ohm´schen Widerstand (reell) bezeichnet man als Wirkwiderstand, die anderen (imaginären) heißen Blindwiderstände.

Bezeichnung	Schaltsymbol	Formel	Zeigerdarstellung
Ohm'scher Widerstand		$Z = R$	$j \cdot \mathrm{Im}\,\underline{Z}$; R; Re $\underline{Z}$
Induktiver Widerstand		$Z = X_L = \omega L$	$j \cdot \mathrm{Im}\,\underline{Z}$; jX_L; Re $\underline{Z}$
kapazitiver Widerstand		$Z = X_C = \frac{1}{\omega C}$	$j \cdot \mathrm{Im}\,\underline{Z}$; jX_C; Re $\underline{Z}$

Beispiel:

Für eine Reihenschaltung aus einem Ohmschen Widerstand und einem induktiven Widerstand soll der Scheinwiderstand berechnet werden. Wir skizzieren dazu das allgemeine Widerstandszeigerdiagramm. Dabei ist es üblich, den Zeiger der rein imaginären Größe iX_L parallel bis zur Zeigerspitze von R zu verschieben, sodass durch die Zeiger R, iX_L und Z eine Dreieck gebildet wird. In einer Reihenschaltung addieren sich die Widerstände; dann gilt:



$$Z = R + iX_L = \sqrt{(60\Omega)^2 + (25\Omega)^2} = 65\Omega$$

Der Scheinwiderstand beträt 65 Ω.

Referate

Integrationsverfahren

Referat im Fach Mathematik BOS (Le)

von

$$\int$$

Empfehlungen für das Anfertigen und Halten von Schülerreferaten

1. **Vorarbeiten**

Ein Referat setzt zunächst eine **intensive Beschäftigung** mit dem zugrundeliegenden mathematischen Problem voraus.
Danach erfolgt die schriftliche Ausarbeitung:

- Gliederung entwerfen und nach Rücksprache mit mir ändern bzw. verbessern.
- Einleitende Worte, benutzte Lehrsätze, verbindende Texte, Zusammenfassung **wörtlich** festhalten.
- Umfangreiche Zeichnungen auf OH-Folie oder als Umdruck vorbereiten.
- **Stichwortzettel** anlegen
- **Zusammenfassung** des Referats als Klassensatz darbieten.

2. **Ratschläge für den Vortrag selbst**

- Thema nennen!
- Problem vorstellen:
  im Überblick beschreiben, worum es geht, Aufgabentext vorlesen,...
- Laut genug sprechen,
- kurz und treffend formulieren, **anschaulich**, aber **exakt** formulieren, auf **Fachsprache** achten,
- **frei** reden
- Schwieriges soll langsamer, Leichtverständliches kann schneller vorgetragen werden,
- schwerverständliche Überlegungen gegebenenfalls **wiederholen**,
- **algebraische Umformungen** nur im wesentlichen wiedergeben,
- Ergebnisse **herausstellen.**

♦ Integrationsverfahren vorstellen (Potenzregel, partielle Integration, Substitution)
♦ Wann wird welches Verfahren angewendet?
♦ Besonderheiten
♦ Durchführung