Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 13. Klasse (Teil 1B)

Lehnen

Stand 6.2010

Umkehrfunktionen

Thema: Umkehrfunktionen

1. Welche der folgenden Funktionen sind umkehrbar? Begründung.

   1.1 $f(x) = x^2 + 5;\ x \in \mathrm{IR}$

   1.2 $f(x) = \cos x;\ x \in \mathrm{IR}$

   1.3 $f(x) = x^2 + 5;\ x \in \mathrm{IR}_+$

2. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $\overline{f}$ an der jeweils angegebenen Stelle b für die folgenden umkehrbaren Funktionen.

   2.1 $f(x) = 3x + 2;\ x \in \mathrm{IR},\ b = f(1)$

   2.2 $f(x) = x^2 + 2x;\ x \in \mathrm{IR},\ b = f(2)$

Umkehrregel:

$$\boxed{\overline{f}'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad bzw. \quad f'(x) = \frac{1}{\overline{f}'(f(x))}}$$

Rationale Funktionen

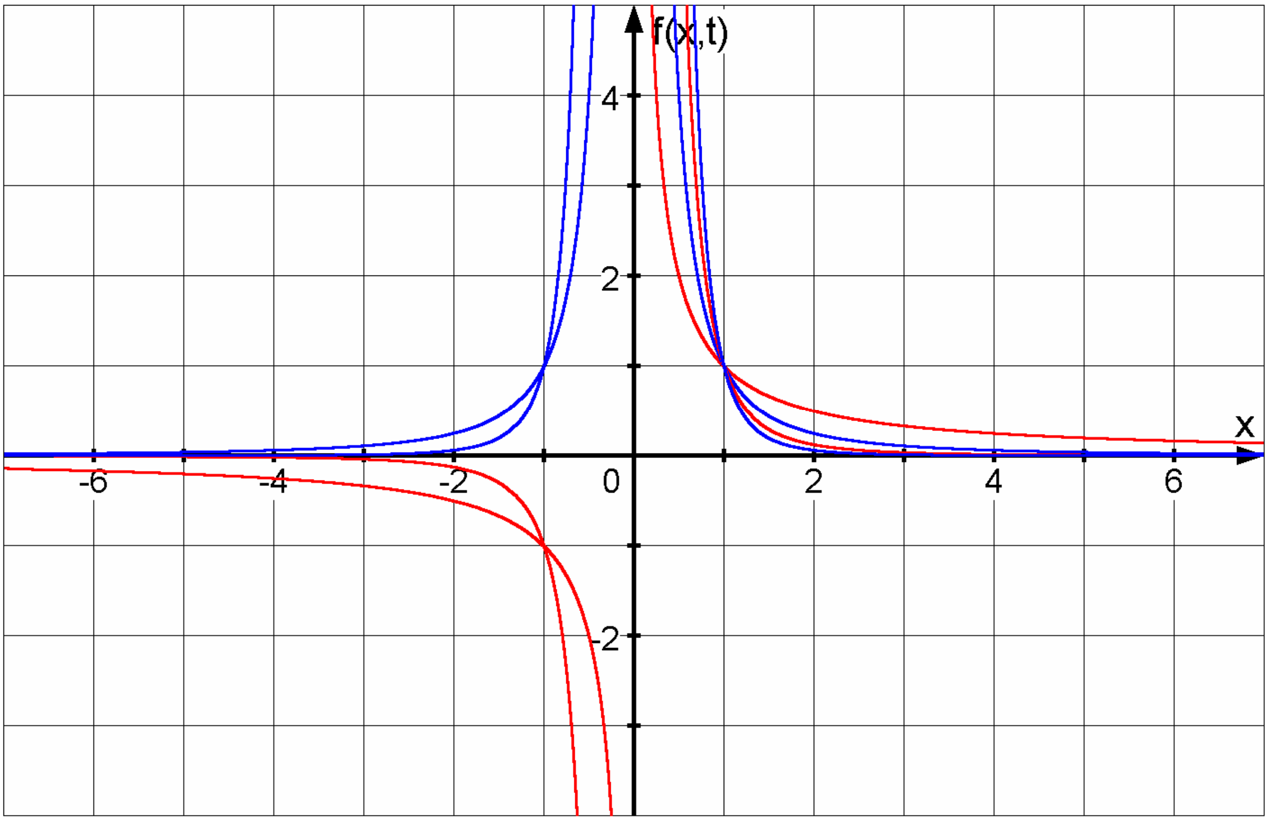
Thema: Hyperbelfunktionen

Funktionen vom Typ

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \text{ mit } x \in IR^{\neq 0} \text{ und } n \in IN^{\neq 0}$$

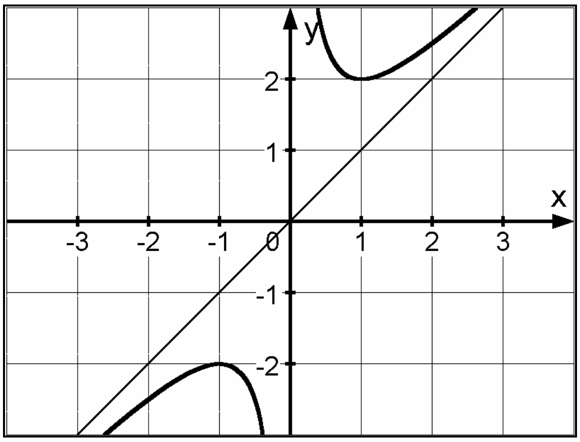
heißen Hyperbeln.

- Sie haben an der Stelle $x_0 = 0$ eine **Unendlichkeitsstelle**.
- Die x-Achse ist **horizontale Asymptote**, die y-Achse **vertikale Asymptote** des Graphen von *f*.
- Für ungerade Exponenten verlaufen die Graphen **punktsymmetrisch** zum Koordinatenursprung, für gerade Exponenten **achsensymmetrisch** zur y-Achse.



Thema: Gebrochen-rationale Funktionen

1 Geben Sie den Funktionsterm der gebrochen-rationalen Funktionen an, deren Schaubild (Graphen) den dargestellten Verlauf hat.



2 Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 1} \quad ; \quad x \in \mathbb{D}_f \ .$$

2.1 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.

2.2 Bestimmen Sie die Polstellen von f.

2.3 Berechnen Sie die Nullstellen von f.

2.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten.

2.5 Hat der Graph der Funktion Lücken?

2.6 Zeichnen Sie den Graph der Funktion und tragen Sie die obigen Stellen bzw. Geraden in die Zeichnung ein.

Lücken, Pole, Stetigkeit

1. Stetigkeit:

Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion heißt stetig an der Stelle x_0 ($x_0 \in \mathrm{ID}_f$), wenn der Grenzwert von *f* an der Stelle x_0 existiert und mit dem Funktionswert von *f* an dieser Stelle übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ist dies für ein $x_0 \in \mathrm{ID}_f$ nicht der Fall, so heißt die Funktion unstetig bei x_0.

2. Nützliches Stetigkeitskriterium:

Der Grenzwert an einer Stelle existiert genau dann, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert existiert und beide Grenzwerte gleich sind. Demnach gilt: Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion ist an der Stelle x_0 stetig genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

3. Polstelle und stetig hebbare Definitionslücke

f sei in einer punktierten Umgebung von x_0 definiert, jedoch nicht an der Stelle x_0 (d.h. $x_0 \notin \mathrm{ID}_f$), dann heißt x_0

- **Polstelle** von *f*, wenn

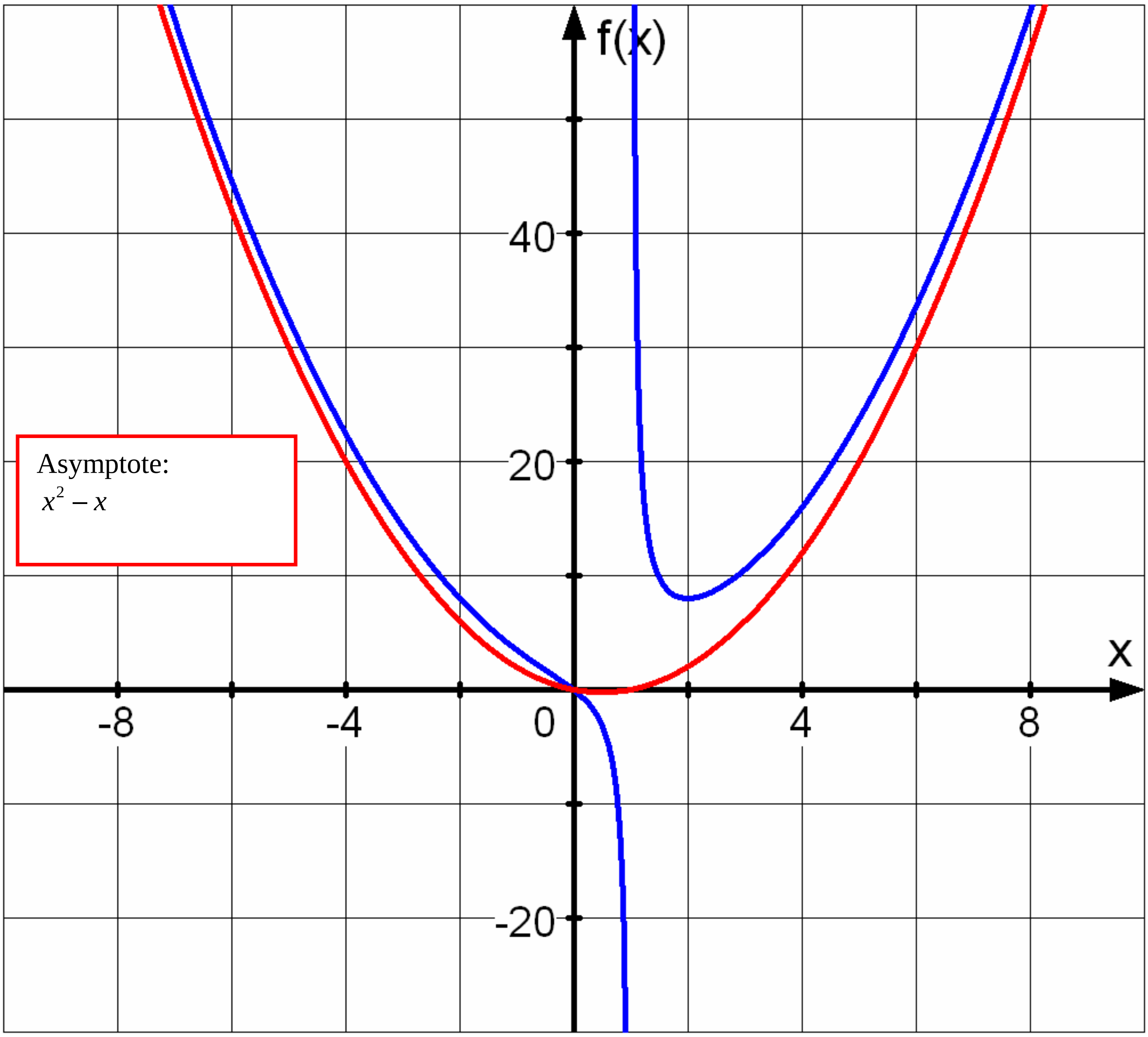
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- **stetig hebbare Definitionslücke**, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert existieren und gleich sind:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$$

Asymptote

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 1}$$



Thema: Gebrochen-rationale Funktionen

1 Gegeben ist die Funktion f mit:

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x-1} \quad ; \quad x \in \mathbb{D}_f \, .$$

1.1 Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an.

1.2 Bestimmen Sie die Polstellen von f und untersuchen Sie das Grenzwertverhalten von $f(x)$ in der Umgebung um die Polstelle.

1.3 Berechnen Sie die Nullstellen von f.

1.4 Wie verhalten sich die Funktionswerte für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$?

1.5 Bestimmen Sie gegebenenfalls die Gleichung der Asymptoten.

1.6 Hat die Funktion Lücken?

1.7 Bestimmen Sie die lokalen Extrempunkte des Graphen von f.

1.8 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion (x-Achse: 1 LE entspricht 1cm, y-Achse: 5 LE entsprechen 1cm) .

2 An welchen Stellen ihres Definitionsbereiches ist die folgende abschnittsweise definierte Funktion unstetig? Zeigen Sie dies mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung.

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{für } x < 0 \\ x & \text{für } 0 \le x < 2 \\ x^2 & \text{für } x \ge 2 \end{cases}$$

Trigonometrische Funktionen

Funktionswerte von trigonometrischen Funktionen

Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\cot x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Literatur:

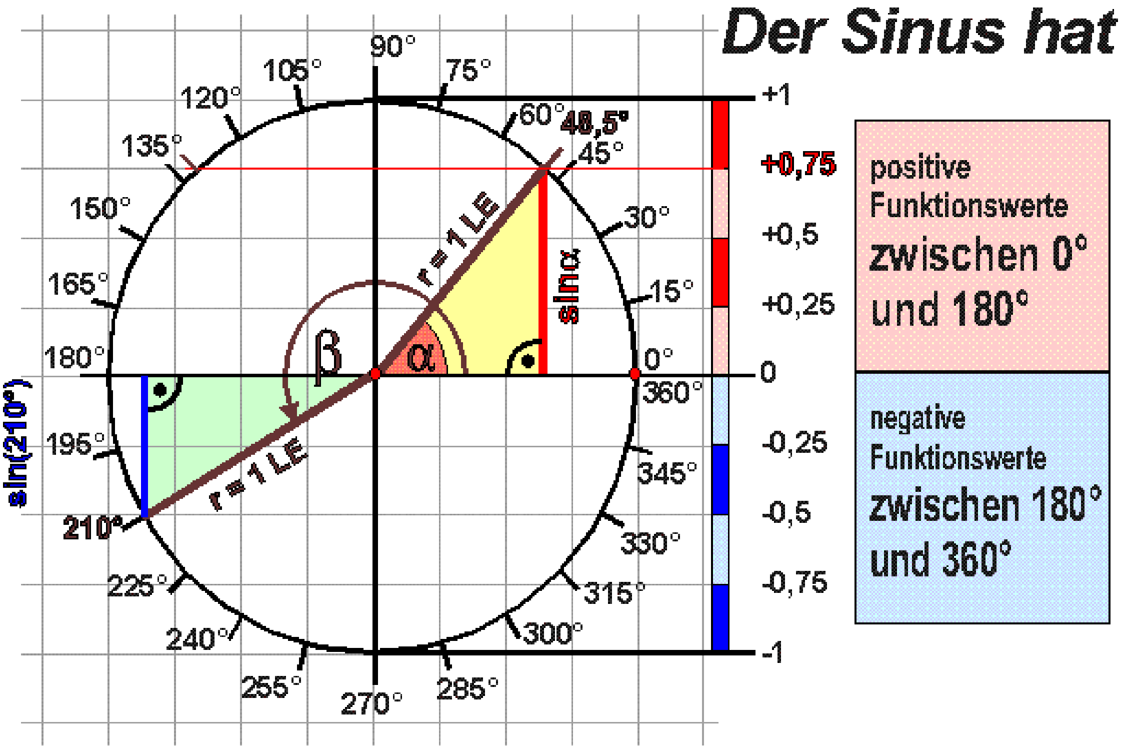
BRONSTEIN, I.N., UND SEMENDJAJEW, K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, Frankfurt/Main, Harri Deutsch, 2002

Sinus am Einheitskreis:

mwf002f (c)1997 DWelzUlm dwu

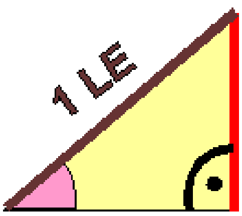
Der Einheitskreis ist der Kreis,
bei dem der Radius 1 Längeneinheit groß ist.
Man kann diesen Radius beliebig wählen, muss den Sinuswert aber über die Längeneinheit umrechnen.

Beispiel: LE = 4cm und sinα = 0,75
ergibt eine 0,75 · 4cm = 3cm lange Gegenkathete



Beispiel 1: Welcher Winkel α hat den Sinuswert $\boxed{0,75}$
Ergebnis: α_1 = 48,5° und α_2 = 131,5°

Beispiel 2: Wie groß ist sin(210°)
Ergebnis -2cm : 1LE = -2cm : 4cm = $\boxed{-0,5}$



= rechtwinklige Dreiecke im Einheitskreis
= Hypotenuse dieses Dreiecks
= Bezugswinkel in diesem Dreieck
= Gegenkathete im Dreieck
(= Sinus-Funktionswert für Hypotenuse = 1 LE)

Integration durch Substitution

Partielle Integration

Rotationsvolumen

Bogenlänge von Funktionsgrafen

Integration durch Substitution

1 Bestimmen Sie die nachstehende unbestimmten Integrale mittels der Integration durch Substitution.

1.1 $\int (2-3x)^4 dx$

1.2 $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

Partielle Integration

2 Bestimmen Sie das nachstehende bestimmte Integrale mittels der partiellen Integration.

2.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx$

Bogenlänge von Funktionsgraphen

3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot \sqrt{x}$; $x \in \mathbb{D}_f$ und bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen zwischen $x = 0$ und $x = 5$.

Na dann viel Spaß!!

Partielle Integration

Viele Integrale, bei denen sich die Substitutionsmethode nicht anwenden läßt, können durch geeignete Zerlegung des Integranden in zwei Faktoren und anschließende Integration gelöst werden.

Aus der Differentialrechnung ist die Produktregel bekannt, die einen Lösungsweg zur Differentiation eines Produktes $u(x) \cdot v(x)$ angibt.

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = [u(x) \cdot v(x)]'$$

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$$

Kehrt man die Produktregel der Differentialrechnung um, indem man beide Seiten der differenzierten Funktionsgleichung integriert, so läßt sich eine Gleichung entwickeln, die eine partielle (teilweise) Integration ihrer Glieder ermöglicht.

$$\int [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int [u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)] dx$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int u(x) \cdot v'(x) dx + \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Merke:

Für zwei im Intervall $[a,b]$ differenzierbare Funktionen *u* und *v* gilt folgende Integrationsregel:

$$\boxed{\int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx}$$

Quelle: KUSCH, ROSENTHAL, JUNG: Integralrechnung, 1991

Anwendungen der Integralrechnung

1. Berechnen Sie den Inhalt des unendlich langen Körpers, der durch Rotation der Hyperbel mit $f(x) = \frac{1}{x}$ um die *x*-Achse über dem Intervall $[1; \infty]$ entsteht.

   1.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f*.

   1.2 Wenden Sie die Formel zur Berechnung von Rauminhalten von Rotationskörpern an.