Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 13. Klasse (Teil 1)

Lehnen

Stand 7.2006

Logarithmus

Logarithmen

- Bei der Logarithmenrechnung sucht man den Potenzexponenten.
- Zweite Umkehrung der Potenzrechnung

$$100 = 10^2$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\log_a b = n$$

n: Logarithmus

a: Basis

b: Numerus

Anmerkung: mathem. Fachausdruck aus dem 17. Jahrh. Von dem schottischen Mathematiker John Napier (logos: Wort, arithmos: Zahl).

Logarithmus (mit beliebiger Basis $a > 0$).

$$\log(x \cdot y) = \log x + \log y \qquad (1)$$

$$\log \frac{1}{x} = -\log x \qquad (2)$$

$$\log 1 = 0 \qquad (3)$$

$$\log r^s = s \cdot \log r \qquad (4)$$

Umrechnen der Logarithmen:

$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$ insbesondere $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$ $\boxed{\log_a x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} a}}$

Übungsaufgaben:

1. $\log_2 5$
2. $\log_7 7$
3. $\log \frac{\sqrt[3]{ab^5}}{c^3}$
4. Bei welchen Werten von $x \in \mathrm{IR}_+^*$ ist

   4.1 $\lg x > 1$

   4.2 $\ln x < 1$

   4.3 $\log_5 x < 1$?
5. $\lg \frac{0{,}356}{38{,}2}$
6. $\lg(100 \cdot \sqrt[7]{0{,}68 \cdot \sqrt[5]{200}})$

Mächtigkeiten

Mächtigkeit

Zum Seitenanfang

Dieser Abschnitt **kann von "EinsteigerInnen" ausgelassen werden**.

Falls eine Menge endlich ist, d.h. nur endlich viele Elemente enthält, wird unter ihrer **Mächtigkeit** (oder **Ordnung**) die **Anzahl ihrer Elemente** verstanden. So hat z.B. die oben definierte Menge B die Ordnung 3. Zwei endliche Mengen, die gleichviele Elemente besitzen, heißen **gleichmächtig**. Man kann sie in gewisser Weise miteinander "identifizieren", indem man jedes Element der einen Menge zu einem "Partner" oder "Stellvertreter" genau eines Elements der anderen Menge erklärt. Einfach ausgedrückt, kann man dann von Standpunkt der Mengenlehre aus (d.h. mit Hilfe der Symbole $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $\supseteq$ und \ ) mit der einen Menge genau dieselben Dinge machen wie mit der anderen. Jeweis ein Element der einen Menge "steht für" ein Element der anderen Menge, und umgekehrt. (Man kann das auch so sagen: Für jemanden, der **nur** den Begriff der Menge und die Symbole $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $\supseteq$ und \ kennt und alles andere ignoriert, sind die beiden Mengen nicht unterscheidbar).

Dieser Begriff kann für unendliche Mengen, d.h. für Mengen, die unendlich viele Elemente enthalten, verallgemeinert werden. Zwei beliebige Mengen heißen **gleichmächtig**, wenn jedes Element der einen Menge zu einem "Partner" oder "Stellvertreter" genau eines Elements der anderen Menge erklärt werden kann, so daß kein Element der zweiten Menge "übrigbleibt".

Im Kapitel **Zahlen** werden wir sehen, dass die Mengen der natürlichen und der rellen Zahlen nicht gleichmächtig sind.

Es gibt unendliche Mengen, die nicht gleichmächtig sind. In diesem Sinn können also auch unendliche Mengen "verschieden viele Elemente" enthalten, also "verschieden groß" sein. Das **wichtigste Beispiel** hierfür bilden die **Mengen der natürlichen und der reellen Zahlen**: Sie besitzen beide unendlich viele Elemente, sind aber nicht gleichmächtig. Dies wird in einem späteren Kapitel besprochen.

Das mathematische Symbol für Gleichmächtigkeit ist $\cong$ (obwohl es daneben noch mehrere andere Bedeutungen hat). So gilt etwa - um ein **Beispiel** zu nennen - für die Mengen N (siehe oben) und U (siehe oben), daß sie gleichmächtig sind: $N \cong U$. Die Identifizierung kann so gewählt werden:

$1 \in N$ ist "Partner" von $1 \in U$
$2 \in N$ ist "Partner" von $3 \in U$
$3 \in N$ ist "Partner" von $5 \in U$
usw.

Über den Begriff isomorph wird im Kapitel **Mathematische Strukturen und Räume** (in Vorbereitung) einiges zu sagen sein.

(Allgemein heißt das: die n-te natürliche Zahl - also $n \in N$

selber - ist "Partner" der n-ten ungeraden Zahl - also der Zahl $2n-1 \in U$). In diesem Sinn gibt es **"genausoviele" ungerade Zahlen wie natürliche!**

Das mag überraschen, ist im Leben unendlicher Mengen aber nichts Besonderes: Obwohl die Menge U der ungeraden natürlichen Zahlen

dadurch entsteht, daß aus der Menge N die geraden Zahlen herausgenommen werden, sind U und N nach wie vor "gleich groß". Das "Unendliche" schlägt dem Alltagsverstand so manches Schnippchen.

Daher hat es in der Geschichte der Mathematik lange gedauert, bis Sachverhalte, in denen das "Unendliche" eine Rolle spielt, in eine genaue Sprache gekleidet wurden. Wir können z.B. nicht wirklich sagen, daß die Mengen N und U "gleich viele Elemente" besitzen - denn die "Anzahl" ihrer Elemente ist unendlich, und unendlich ist keine Zahl. Daher die Anführungszeichen. Aber wir können präzise formulieren, daß die beiden Mengen gleichmächtig sind. Der mathematische Begriff der Gleichmächtigkeit ist an die Stelle der Alltagsvorstellung "gleich viele" getreten. Das ist ein schönes Beispiel für mathematische Begriffsbildung.

Gleichmächtige Mengen werden manchmal auch als zueinander **isomorph** bezeichnet, obwohl dieser Begriff noch andere Bedeutungen hat. Er heißt soviel wie "ununterscheidbar, wenn durch eine bestimmte Brille betrachtet". Im Fall der Gleichmächtigkeit von Mengen ist die "Brille" jene der Mengenlehre: eine "Brille", die nur $\in$, $\cap$, $\cup$, $\subseteq$, $\supseteq$ und \ kennt und alles andere ignoriert.

Zum Abschluß dieses Abschnitts noch ein Begriff, der die "Größe" unendlicher Mengen betrifft:

Mengen, deren Elemente mit Hilfe der natürlichen Zahlen "durchnumeriert" werden können, sind gleichmächtig zu N. Sie werden **abzählbar** genannt. Nicht jede unendliche Menge ist abzählbar. Es gibt also unendliche Mengen, die "so viele" Elemente besitzen, daß sie sich nicht "durchnumerieren" lassen. Ein Beispiel dafür ist die **Menge der reellen Zahlen**: sie ist **überabzählbar**. Dieser Sachverhalt wird in einem späteren Kapitel besprochen.

Monaden

Das Wort **MONADE** (gr. 'monas' = Einheit) stammt aus dem 5. Jahrhundert vor Christus und bedeutet eine nicht weiter teilbare Einheit. So sind für **Platon** die Ideen Monaden, für **Pythagoras** aber die Zahleinheit. Giordano Bruno, 1600 in Rom als Ketzer verbrannt, nennt als Monade der Monaden Gott, aber nur Leibniz liefert - übrigens in Briefen und Aufsätzen verstreut - eine systematische **Monadenlehre**.

Die Monade, von der wir hier sprechen wollen, ist nichts anderes als eine einfache Substanz, die in die zusammengesetzten Dinge eingeht; einfach heißt so viel wie: ohne Teile.

Differenzialrechnung:

Exponentialfunktionen/ Umkehrfunktionen/ Gebrochen-rationale Funktionen/ Trigonometrische Funktionen

Exponentialfunktionen

Das Monotoniekriterium

Die Funktion f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gelten folgende Aussagen:

Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ **streng monoton steigend** auf I.

Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ **streng monoton fallend** auf I.

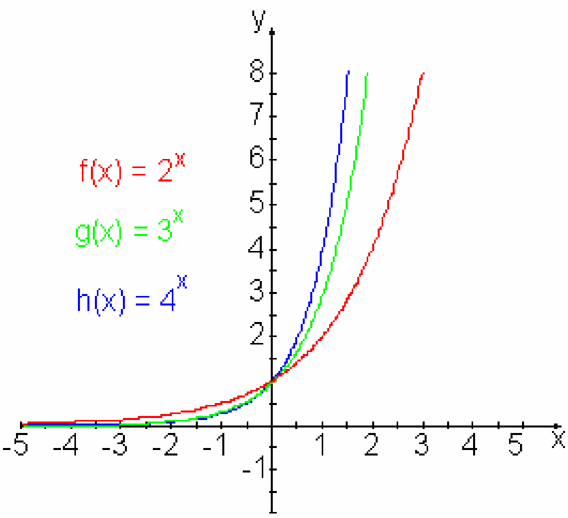
Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ **monoton steigend** auf I.

Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$, so ist $f(x)$ **monoton fallend** auf I.

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen haben die Funktionsgleichung:

$f(x) = a^x,\ a \in IR^+ \setminus \{0\}$ und $x \in IR$



Eigenschaften der Exponentialfunktionen:

Exponentialfunktionen

- haben die Definitionsmenge ID = R
  und die Wertemenge W = R^+.
- haben keine Nullstelle.
- haben keinen Hoch- oder Tiefpunkt.
- gehen alle durch die Punkte $S_1(0/1)$ und $S_2(1/a)$.
- sind für alle x monoton steigend, wenn a > 1.
- sind für alle x monoton fallend, wenn a < 1.
- haben keinen Wendepunkt.
- haben die x-Achse als Asymptote.
- sind umkehrbar.

Sonderfall: $a = 1$: Dann gilt, $f(x) = 1^x = 1$.
Das ist die Parallele zur x-Achse durch (0/1).

The Natural Logarithmic Base

$$e$$

It is not known who first determined

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2.7182818285\ldots$$

We see in this limit the outcome of a fierce tug-of-war. On one side, the exponent explodes to infinity. On the other side, 1+x rushes toward the multiplicative identity 1.

A geometric characterization of e is as follows: e is the unique positive root x of the equation

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = 1$$

which is responsible for e being employed as the natural logarithmic base.

The definition of e implies that

$$\frac{d}{dx}\left(c \cdot e^x\right) = c \cdot e^x$$

and, further, that any solution of the first order differential equation

$$\frac{dy}{dx} = y(x)$$

must be of this form. Applications include problems in population growth and radioactive decay. Solutions of the second order differential equation

Hinweise: fierce tug-of-war = heftiges Tauziehen, implies = hindeuten, growth = Wachstum, solution = Lösung

e (Mathematik), Symbol für eine transzendente Zahl, die in der breiten Vielfalt ihrer Anwendungen mit der Zahl π (Pi) vergleichbar ist. Die Zahl e wird meist als Grenzwert des Ausdrucks $(1 + 1/n)^n$ mit n gegen unendlich definiert. Einige Werte dieses Ausdrucks für zunehmendes n zeigt folgende Tabelle:

Berechnungen von $(1+1/n)^n$ für zunehmende Werte von n

n	$(1+1/n)^n$	Numerischer Wert
1	$(1+\frac{1}{1})^1$	2,000
2	$(1+\frac{1}{2})^2$	2,250
3	$(1+\frac{1}{3})^3$	2,369
5	$(1+\frac{1}{5})^5$	2,489
10	$(1+\frac{1}{10})^{10}$	2,594
20	$(1+\frac{1}{20})^{20}$	2,653
40	$(1+\frac{1}{40})^{40}$	2,684
50	$(1+\frac{1}{50})^{50}$	2,691
100	$(1+\frac{1}{100})^{100}$	2,705
1 000	$(1+0{,}001)^{1000}$	2,717
10 000	$(1+0{,}0001)^{10000}$	2,718
∞	....	2,71828...

Die Untersuchung der rechten Spalte der obigen Tabelle zeigt, dass sich der numerische Wert des Ausdrucks mit wachsendem n immer mehr einem Grenzwert nähert. Dieser Grenzwert beträgt annähernd 2,7182818285.

Der Wert von e kann auch durch die Berechnung des Grenzwerts einer bestimmten unendlichen Reihe bestimmt werden.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{1 \times 2 \times 3 \cdots \times (n-1)(n)} + \cdots$$

ist ein Beispiel einer solchen Reihe. Im Gegensatz zu ð kann man e nicht einfach geometrisch interpretieren. Die Zahl e hat wie ð eine für die polynomische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$ keine Lösung.

Die Zahl e ist die Basis des natürlichen Logarithmus. Sie taucht in der *Exponentialfunktion* e^x auf, der einzigen Funktion, deren Wachstumsgeschwindigkeit gleich ihrer Größe ist (in der Sprache der Infinitesimalrechnung die einzige Funktion, die identisch mit ihrer Ableitung ist). Daher sind Exponentialfunktionen mit der Zahl e grundlegend für Gleichungen, die Wachstum und andere Veränderungsprozesse beschreiben.

Die Zahl e kommt beispielsweise in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ständig vor. Sind z. B. viele Briefe geschrieben und die entsprechenden Umschläge adressiert worden und werden dann die Briefe wahllos in die Umschläge gesteckt, so liegt die Wahrscheinlichkeit, dass sich jeder Brief in einem falschen Umschlag befindet, sehr nahe bei e^{-1}.

Thema: Exponentialfunktionen

1. Eine fürchterliche Science-fiction-story: In einer biologischen Raumstation wird durch den Fehler eines unaufmerksamen Gentechnikers ein 1 mm langer, normalerweise harmloser Wurm so umprogrammiert, daß er seine Länge alle 20 Minuten verdoppelt.

1.1 Wie lang ist der Wurm 1, 2, 3, 4 Stunden nach Beginn seines explosiven Wachstums ?

1.2 Da es weder gelingt, den Wurm zu vernichten, noch sein verhängnisvolles Wachtum aufzuhalten, wird genau 5 Stunden nach Beginn der Katastrophe ein warnendes Funksignal zur 24 Lichtstunden entfernten Erde gesendet. Das Funksignal breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit, also 300000 km/s aus. Welche Strecke hat es 1, 2, 3, 4 Stunden nach seiner Aussendung zurückgelegt?

1.3 Der aggressive Wurm wächst genau in Richtung Erde. Wann hat er sie mit seinem Vorderteil erreicht?

1.4 Wann hat der Wurm das Funksignal überholt?

Übungen - Exponentialfunktionen

1. Aus dem Chemielabor der TU Berlin entweicht durch ein Versehen ein ansteckendes Virus. Zum Zeitpunkt der Entdeckung des Vorfalls sind bereits 100 Studenten infiziert. Die Zahl der Infizierten nimmt täglich um 13% zu.

1.1. Stellen Sie die Wachstumsfunktion auf.

1.2. Wie viele Personen sind nach 40 Tagen infiziert? (Runden Sie auf eine ganze Zahl).

1.3. Wie lange würde es dauern, bis die gesamte Berliner Bevölkerung (ca. 4 Mill.) von dem Virus angesteckt ist?

2. Bei einem Versuch zur Vermehrung von Wasserlinsenkeimlingen wurde diese Tabelle angelegt:

t Tage nach Versuchsbeginn	B(t) Anzahl der Keimline
0	10
1	14
2	20
3	28
4	40
5	56
6	80

2.1 Zeichnen Sie den Graphen der oben dargestellten Tabelle.

2.2 Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.

2.3 Berechnen Sie die Anzahl der Keimlinge nach 9 Tagen und nach 30 Tagen.
2.4 Nach wie vielen Tagen gibt es eine Million Keimlinge?

Übungen – Exponentialfunktionen

1. Das Wachstum einer Bakterienart wird im Labor experimentell untersucht. Dazu wird die Anzahl der Bakterien in der Nährlösung halbstündlich ausgezählt. Es ergibt sich folgendes Messprotokoll.

Zeit in Stunden	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
Anzahl der Bakterien in 1000	0,51	0,65	0,84	1,07	1,37	1,76	2,25

1.1. Zeigen Sie, dass exponentielles Wachstum vorliegt.

1.2. Zeichnen Sie den zugehörigen Funktionsgraphen .

1.3. Stellen Sie das Wachstumgesetz auf (Zeit t in Stunden).

1.4. Bestimmen Sie die Zeit t, in welcher sich die Bakterienzahl jeweils verdoppelt.

2. Zur Unterstützung von Gärungsprozessen, z.B. bei der Herstellung von Lebensmitteln, werden Hefen benötigt. Die Hefezellen wachsen in Behältern mit Nährlösung. Wir nehmen einmal an, dass sich in einer solchen Hefekultur die Anzahl der Zellen stündlich verdoppelt. Zu Beginn des Wachstumsprozesses werden 0,5 g Hefe in den Behälter eingebracht, der ein Fassungsvermögen von 200 g besitze.

2.1. Stellen Sie eine Wertetabelle auf, aus der man die Hefemasse nach 1, 2, 3, 4 Stunden ablesen kann.

2.2. Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, welche der Zeit t (in Stunden) die entsprechende Hefemasse (in Gramm) zuordnet. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen.

2.3. Nach welcher Zeit ist das Fassungsvermögen des Behälters ausgeschöpft ?

3. Bei einem Versuch zur Vermehrung von Wasserlinsenkeimlingen wurde diese Tabelle angelegt:

t Tage nach Versuchsbeginn	B(t) Anzahl der Keimlinge
0	10
1	14
2	20
3	28
4	40
5	56
6	80

3.1 Stellen Sie die zugehörige Funktionsgleichung auf.
3.2 Berechnen Sie die Anzahl der Keimlinge nach 9 Tagen und nach 30 Tagen.

3.3 Nach wie vielen Tagen gibt es eine Million Keimlinge?

Thema: Ableitungsregeln

1. Konstantenregel: $c' = 0$

2. Potenzregel: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}\ ;\ n \in \mathrm{IN}$

3. Faktorregel: $(a \cdot u(x))' = a \cdot u'(x)$

4. Summenregel: $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$

5. Kettenregel: $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

6. Produktregel: $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Ableitungen der Exponentialfunktion *f* mit: $f(x) = c \cdot a^x\ ;\ x, c \in \mathrm{IR}, a \in \mathrm{IR}_+^*$

$$\boxed{\begin{array}{l}(c \cdot a^x)' = c \cdot \ln a \cdot a^x \\ (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\end{array}}$$

Thema: Differenziation von Exponential - und Logaritmusfunktionen

1. Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion *f* mit:

1.1 $f(x) = e^{2x}$ ☺

1.2 $f(x) = e^{-x}$ ☺

1.3 $f(x) = e^{\sin x}$ L

1.4 $f(x) = e^{x^2}$ L

2. Bestimmen Sie die ersten zwei Ableitungen.

2.1 $f(x) = x^2 e^x$ K

2.2 $f(x) = x^2 e^{-x}$ K

3. Bilden Sie die Ableitung.

3.1 $f(x) = 2 \cdot \ln x$ ☺

3.2 $f(x) = 2x \cdot \ln x$ K

3.3 $f(x) = 2x^2 \cdot \ln x$ L

3.4 $f(x) = x \cdot \sqrt{\ln x}$ M

Arbeitsblatt im Fach Mathematik (Le)

Thema: Funktionsuntersuchung / Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = (x+1)\cdot e^{-x}$; $x \in \mathrm{IR}$.

Führe für die angegebene Funktion eine Funktionsuntersuchung (Kurvendiskussion) durch und zeichne anschließend den Funktionsgraphen.

☺ I. Berechne die **Nullstellen** x_N:

Die **Nullstellen** lauten:

K II. Bestimme die **Hoch- und Tiefpunkte**:

Hochpunkte H:

Tiefpunkte T:

L III. Berechne die **Wendepunkte**:

Wendepunkte W:

K IV. **Verhalten für** $x \to \infty$ und $x \to -\infty$:

x	10	100	$\to \infty$
$f(x)$			

x	-10	-100	$\to -\infty$
$f(x)$			

☺ V. **Zusammenfassung der Ergebnisse**:

Nullstellen x_N	Hochpunkte H	Tiefpunkte T	Wendepunkte W

☺ VI. Zeichne den **Graphen der Funktion** *f:*

Thema: Produktregel, Kettenregel

1. Bilden Sie die erste Ableitung nach der Produktregel:

   1.1 $f(x) = x^2 \cdot x^3$

   1.2 $f(x) = x^5 (x^2 - 4x)$

   1.3 $f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^2 - 3x + 1)$

2. Bilden Sie die erste Ableitung:

   2.1 $f(x) = \cos(2x)$

   2.2 $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

   2.3 $f(x) = \sin(2 - x)$

   2.4 $f(x) = \sin(x^2)$

   2.5 $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

3. Differenzieren Sie die nachstehenden Funktionen *f* auf IR.

   3.1 $f(x) = (1 + x^2)^{3/2}$

   3.2 $f(x) = (x^2 - 1)^3 (1 + x)^2$

   3.3 $f(x) = \arccos\sqrt{x^2 - 3}$

   3.4 $f(x) = \arctan\dfrac{1}{\sqrt{x + 5}}$

a

Arbeitsblatt

Thema: Differenzialrechnung

1. Bilden Sie die erste Ableitung:

1.1 $f(x) = x^2 \cdot x^3$

1.2 $f(x) = x^5(x^2 - 4x)$

1.3 $f(x) = (x^3 - 2x^2)(x^2 - 3x + 1)$

2. Bilden Sie die erste Ableitung:

2.1 $f(x) = \cos(2x)$

2.2 $f(x) = x^2 \cdot \sin x$

2.3 $f(x) = \sin(2 - x)$

2.4 $f(x) = \sin(x^2)$

2.5 $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$

3. Differenzieren Sie die nachstehenden Funktionen f auf IR.

3.1. $f(x) = (1 + x^2)^{3/2}$

3.2. $f(x) = (x^2 - 1)^3(1 + x)^2$

3.3. $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x}$

3.4. $f(x) = \cos\ (4x^2)$

3.5. $f(x) = \frac{10 + x}{1 + x}$

3.6. $f(x) = 2x^2 \cdot \sqrt{2x + 2}$