Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 12. Klasse (Teil 3)

Lehnen

Stand 5.2005

Integralrechnung

Informationsblatt: Integralrechnung

Rechenregeln für bestimmte Integrale:

f sei eine stetige Funktion. Dann gilt:

1. Stimmen obere und untere Grenze überein, so ist das Integral 0.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Intervalladditivität.

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

3. Vertauschung der Grenzen ändert das Vorzeichen.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Faktorregel.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

5. Summenregel.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Gottfried Wilhelm Leibniz
geb. 1.7.1646 Leipzig
gest.14.11.1716 Hannover

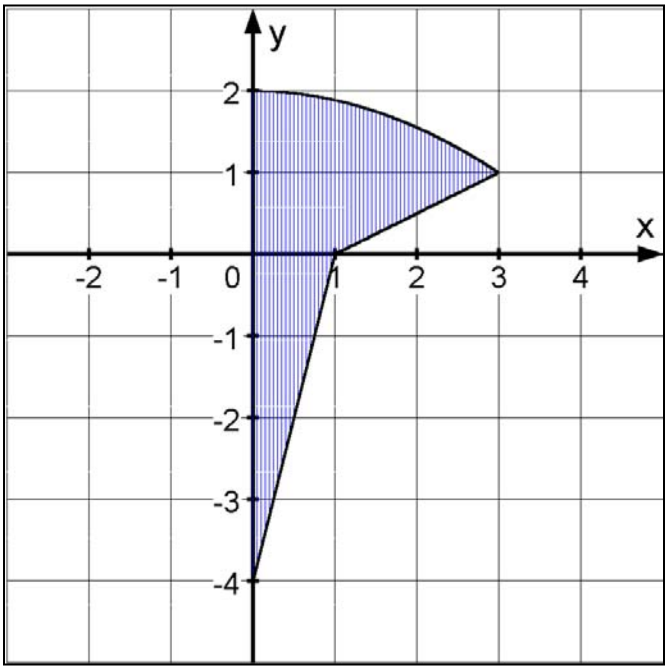
Anwendungen der Integralrechnung

Berechnen Sie den Inhalt der abgebildeten Fläche.

$$f(x) = 4x - 4 \quad ; \quad x \in [0;1]$$

$$g(x) = 0{,}5x - 0{,}5 \quad ; \quad x \in [1;3]$$

$$h(x) = -\tfrac{1}{9}x^2 + 2 \quad ; \quad x \in [0;3]$$



Thema: Stammfunktionen

Funktion	**Stammfunktion**
x	$\frac{1}{2} x^2$
$2x - 3$	$x^2 - 3x$
$4x + 1$	$2x^2 + x$
$81x^2 + 2x$	$27x^3 + x^2$
$- 3x^2 + 10x - 3$	$- x^3 + 5x^2 - 3x$
$16x^3 - 6x$	$4x^4 - 2x^3$
$-12/7\ x^3 - 12x + 1/2$	$- 3/7\ x^4 - 6x^2 + 1/2\ x$
$2/3\ x^5 - 100x$	$1/9\ x^6 - 50x^2$
$(x - 1)(x + 2)(x-3)$	$1/4\ x^4 - 2/3\ x^3 - 5/2\ x^2 + 6x$
$(x - 5)^4$	$1/5\ (x - 5)^5$
$(2x - 5)^4$	$1/10\ (x - 5)^5$
$(1 - 3x)^3$	$-1/4\ (1 - x)^4$

Funktion	**Stammfunktion**
$- 4 / x^2$	$(2x + 4) / x$
$1 / (3x + 1)^2$	$- 1 / 3(3x+1)$
$x / (x^2 + 1)^3$	$- 1 / 4(x^2 + 1)^2$
$(x + 2) / (x + 1)^3$	$- (x + 2)^2 / 2(x + 1)^2$
$2x / (x^2+ 1)^3$	$- 1 / 2(x^2 + 1)^2$
$(2x + 1) / (x^2 + x + 1)$	$\ln (x^2 + x + 1)$
$2x / (x^2 + 1)$	$\ln (x^2 + 1)$
$x^2 / (x^3 + 1)^2$	$- 1 / 3(x^3 + 1)$
$(x - 3)(x + 5) / (x + 1)^2$	$(x - 3)^2 / (x+1)$

Grundintegrale und weitere unbestimmte Integrale

$$\int 0\ dx = C$$

$$\int a\ dx = ax + C \quad (a \neq 0)$$

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \in \mathrm{IR}, n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\ dx = \sin x + C$$

$$\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a \neq 1)$$

$$\int e^x\ dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx = \tan x + C \quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in Z)$$

$$\int \sqrt{x}\ dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln a}\ dx = \log_a x + C$$

$$\int \sin^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2 x\ dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

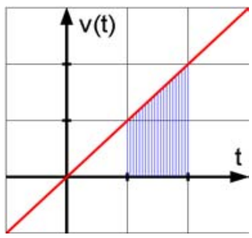
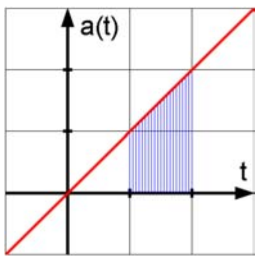
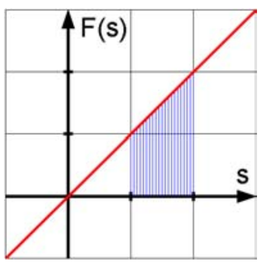
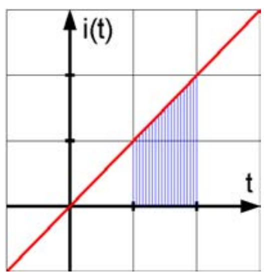
...
Und ziehe schon an die zehen Jahr
Herauf, herab und quer und krumm
Meine Schüler an der Nase herum-
Und sehe, daß wir nichts wissen können!
Das will mir schier das Herz verbrennen.
(aus: Faust - Der Tragödie erster Teil, J.W. VON GOETHE)

Technisch-physikalische Bedeutung des Integralbegriffs

Der Wert des bestimmten Integrals

$$\int_a^b f(x)dx$$

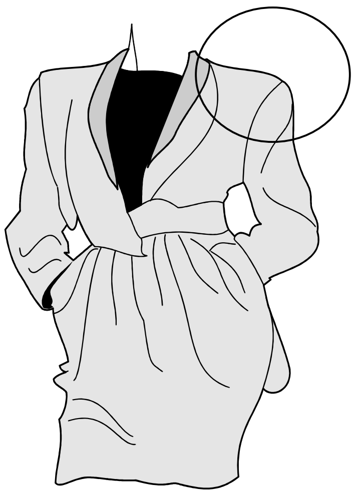
gibt für den Fall $f(x) > 0$ den Flächeninhalt der Fläche an, die vom Graphen der Funktion f, von der x-Achse und von den Geraden zu $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Dieser Flächeninhalt hat bei einigen physikalischen Problemen eine bestimmte Bedeutung. Das Integral kann deshalb wie die Ableitung in verschiedenem Sinne physikalisch interpretiert werden. Beispiele enthält die folgende Tabelle.

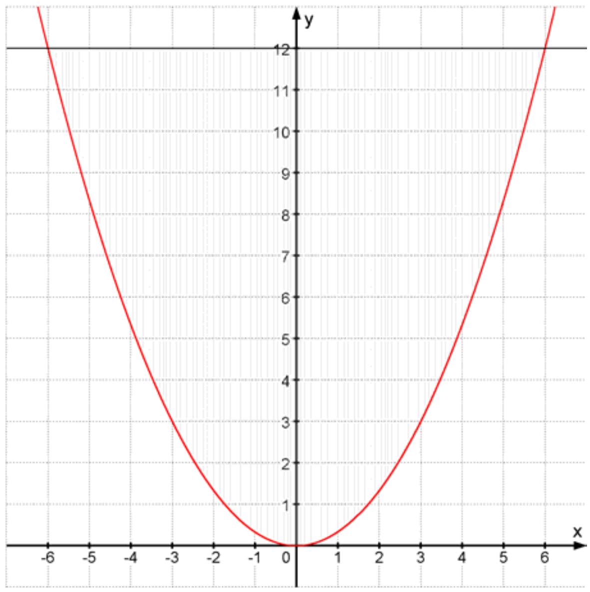
Ausgangsfunktion	Integral	Skizze	Zusammenhang
Geschwindigkeit $v(t)$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$		Der Flächeninhalt entspricht dem im Zeitintervall $[t_1;t_2]$ zurückgelegten Weg.
Beschleunigung $a(t)$	$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1;t_2]$ erreichten Geschwindigkeit.
Kraft $F(s)$	$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$		Der Flächeninhalt entspricht der im Wegintervall $[s_1;s_2]$ verrichteten mechanischen Arbeit.
Stromstärke $i(t)$	$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$		Der Flächeninhalt entspricht der im Zeitintervall $[t_1;t_2]$ durch den Strom transportierten elektrischen Ladung.

Arbeitsblatt im Fach Mathematik

Flächen zwischen Funktionsgraphen

☞Aus einem Stück Schaumgummi sollen Schulterpolster zugeschnitten werden. Die Form der Polster läßt sich beschreiben durch die Funktionen *f* mit $f(x) = \frac{1}{3}x^2;\ x \in \mathrm{IR}$ und *g* mit $g(x) = 12;\ x \in \mathrm{IR}$.
Wieviel Schaumgummi (Flächeneinheiten) benötigt man für ein Polster ohne Berücksichtigung des Verschnitts?





1. Schnittstellen der Funktionen bestimmen, setze $f(x) = g(x)$.

2. Intervallgrenzen *a* und *b* festlegen.

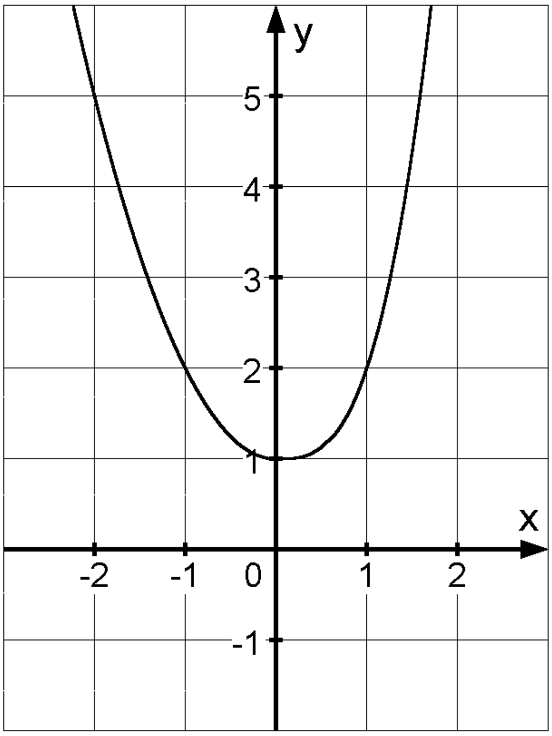
3. $f(x) - g(x)$ berechnen.

4. Das bestimmte Integral berechnen.

Thema: Flächen unter Funktionsgraphen

Gegeben ist der Graph der Funktion *f* mit:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x^2 \ , & \text{falls } x < 0 \\ 1+x^3 \ , & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}.$$



1. Schraffieren Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und den Parallelen zur y-Achse an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ begrenzt wird.

2. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstückes.

Intervallgrenzen festlegen:

Funktionsgleichung einer Stammfunktion *F* von *f*:

Das bestimmte Integral:

Ablaufplan zum Lösen von Übungs- bzw. Anwendungsaufgaben im Stoffgebiet Integralrechnung

1. Erkennen der Aufgabenstellung

Gegebenes und Gesuchtes?
Informative Figur, Funktionsgraph!

2. Erfassen der Lage des mathematischen Objektes im Koordinatensystem

Ist das Koordinatensystem gegeben?

- ja
- nein → Bestimmen der Lage des Koordinatensystems

3. Aufstellen der Funktionsgleichung

Ist die Funktionsgleichung gegeben?

- ja
- nein → Funktionstyp/allgemeine Funktionsgleichung bestimmen
  Rekonstruktion von Funktionen

4. Bestimmen der Integrationsgrenzen

Sind Integrationsgrenzen gegeben?

- ja
- nein → Ablesen aus der informativen Figur/aus dem Graphen
  Berechnung der Nullstellen/Schnittstellen

5. Bestimmen des Integrationsansatzes

Fläche oberhalb der x-Achse	Fläche unterhalb der x-Achse	Fläche teilweise oberhalb, teilweise unterhalb der x-Achse*	Fläche von den Graphen zweier Funktionen** eingeschlossen
$\int_a^b f(x)dx$	$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\|$	$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| + \left\|\int_b^c f(x)dx\right\|$	$\left\|\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right\|$

6. Berechnung der Maßzahl

7. Ergebnisdiskussion

* b ist ein Nullstelle im Intervall [a;c]

** a und b sind benachbarte Schnittstellen der Funktionen f und g

Übungsklausur zur 3. Klausur im Fach Mathematik (Le)

Thema: Integralrechnung

1. Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* mit den Funktionsgleichungen:

$$f(x) = 3x^2 \ ; \ x \in \mathrm{IR}$$

und $$g(x) = -3x^3 + 6x \ ; \ x \in \mathrm{IR}.$$

1.1. Bestimme den Inhalt A_1 der Fläche, die der Graph der Funktion g mit der x-Achse einschließt.

1.2. Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen *f* und *g*.

1.3. Skizziere die Graphen von *f* und *g* im Intervall [-2;2].

1.4. Bestimme den Flächeninhalt A_2 des von den Graphen von *f* und *g* eingeschlossenen Flächenstückes im Intervall [-2;2].

1.5. Bestimme das Verhältnis der Flächeninhalte A_1 und A_2.

2. Gegeben sind die Funktionen *j* und *k* mit:

$$j(x) = 2x^2 \quad ; x \in \mathrm{IR}$$

$$k(x) = c \quad ; x, c \in \mathrm{IR}.$$

2.1. Welche Zahl ist in c einzusetzen, damit die Graphen der beiden Funktionen eine Fläche vom Inhalt 25FE einschließen?

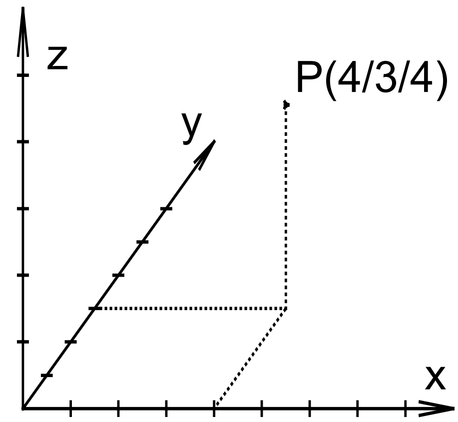
2.2. Berechne das bestimmte Integral in Abhängigkeit vom Parameter k (k>0):

$$\int_o^{3\sqrt{k}} \left(\frac{1}{4}x^2 - k \right) dx$$

Vektorrechnung

Thema: Vektorrechnung

1. **Kartesische Koordinatensysteme**:



2. **Der Abstand zweier Punkte im Raum**: $P(p_1/p_2/p_3)$ und $Q(q_1/q_2/q_3)$ seien beliebige Punkte im Raum. Dann gilt für ihren Abstand:

$$\left|PQ\right| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}$$

3. **Vektoren als Pfeilklassen**: Eine Verschiebung, die alle Punkte des Raumes (der Ebene) in die gleiche Richtung um den gleichen Betrag verschiebt, bezeichnet man als Vektor $\vec{v}$. Ein Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Klasse von gleichgerichteten, gleichorientierten und gleichlangen Pfeilen auffassen. Vektoren werden in Spaltenschreibweise dargestellt.

$$Raum\colon\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad Ebene\colon\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. **Nullvektoren/Einheitsvektoren**: Als Nullvektor $\vec{0}$ bezeichnet man denjenigen Vektor, der jeden Punkt des Raumes (der Ebene) in sich selbst verschiebt.

$$Raum\colon\ \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad Ebene\colon\ \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

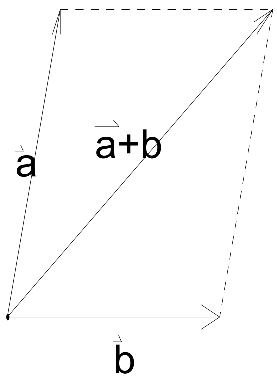
   Den Verschiebungspfeilen des Nullvektors lässt sich wohl die Länge 0, aber keine bestimmte Richtung zuordnen. Ein Vektor, dessen Verschiebungspfeile die Länge 1 besitzen, wird als Einheitsvektor bezeichnet.

5. **Der Betrag eines Vektors**: Als Betrag $\left|\vec{v}\right|$ eines Vektors $\vec{v}$ bezeichnet man die Länge der zugehörigen Verschiebungspfeile.

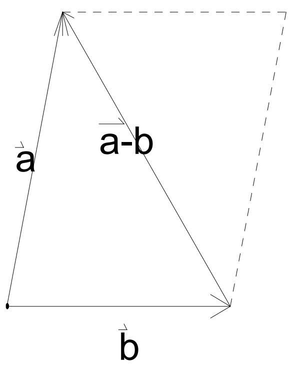
$$Raum:\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$Ebene:\ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

6. **Die Summe zweier Vektoren**: Führt man die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entsprechenden Verschiebungen hintereinander aus, so erhält man eine Gesamtverschiebung. Den Vektor, dem diese Verschiebung zugeordnet ist, bezeichnet man als Summe $\vec{a}+\vec{b}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Geometrisch anschaulich kann $\vec{a}+\vec{b}$ nach der abgebildeten Parallelogrammregel konstruiert werden.



7. **Die Differenz zweier Vektoren**: Als Differenz $\vec{a}-\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezeichnet man die Summe des Vektors $\vec{a}$ und des Gegenvektors von $\vec{b}$: $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Geometrisch anschaulich kann man die Differenz $\vec{a}-\vec{b}$ nach der abgebildeten Parallelogrammregel konstruieren.



8. **Der Gegenvektor eines Vektors**: Der Gegenvektor des Vektors $\vec{a}$ wird mit -$\vec{a}$ bezeichnet. Der Gegenvektor wird auch als inverses Element bezeichnet. Schreibweise: $\vec{a}$:$-\vec{a}$.

9. **Rechnen mit Vektoren**: Mit Vektoren kann man algebraisch rechnen. Man kann Vektoren addieren, subtrahieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. Für Spaltenvektoren gilt:

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_a\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_a\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

$$r\vec{a}=\begin{pmatrix}ra_a\\ra_2\\ra_3\end{pmatrix}$$

10.**Rechengesetze für Vektoren**:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$
$$r(s\vec{a})=(rs)\vec{a}$$
$$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$$
$$(r+s)\vec{a}=r\vec{a}+s\vec{a}$$

11.**Linearkombination von Vektoren**: $\vec{v}=r_1\vec{a}_1+r_2\vec{a}_2+\ldots+r_n\vec{a}_n$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n$ bezeichnet.

Vektorrechnung

1 Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.1 Zeichne die Repräsentanten der Vektoren.

1.2 Berechne die Vektorterme $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.3 Berechne die Beträge der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

2.1 Überprüfe die beiden Vektoren auf Kollinearität.

3 Gegeben sind die Punkte $P(1;2;3)$ und $Q(4;5;6)$.

3.1 Bestimme die Gleichung der Geraden durch die Punkte *P* und *Q*. Überprüfe, ob der Punkt $R(2;3;4)$ auf der Geraden liegt.

4 Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt hat den Radius 7.

4.1 Liegt der Punkt $N(3;6)$ innerhalb, auf oder außerhalb des Kreises?

5 Erläutere die Begriffe Tangente, Sekante und Passante anhand einer Skizze. Welchen Anforderungen müssen jeweils die vektorielle Geradengleichung bzw. vektorielle Kreisgleichung erfüllen.

Vektorrechnung

1. Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.1 Zeichnen Sie die Repräsentanten der Vektoren.

1.2 Berechnen Sie die Vektorterme $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

1.3 Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -20 \\ -12 \end{pmatrix}$.

2.1 Überprüfen Sie die beiden Vektoren auf Kollinearität.

3. Gegeben sind die Punkte $P(1;2;3)$ und $Q(4;5;6)$.

3.1 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte *P* und *Q.* Überprüfen Sie, ob der Punkt $R(2;3;4)$ auf der Geraden liegt.

4. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt hat den Radius 7.

4.1 Liegt der Punkt $N(3;6)$ innerhalb, auf oder außerhalb des Kreises?

5. Erläuteren Sie die Begriffe Tangente, Sekante und Passante anhand einer Skizze. Welchen Anforderungen müssen jeweils die vektorielle Geradengleichung bzw. vektorielle Kreisgleichung erfüllen.

6. Gegeben ist die Gerade g mit: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6.1 Überprüfen Sie, ob der Punkt A(2;5) auf der Geraden liegt.
6.2 Überprüfen Sie, ob der Punkt B(-7;-5;8) auf der Geraden f:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ liegt.

7. Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $P_1(1;2;1)$ und $P_2(0;5;-1)$. Durch Vertauschen der Punkte erhält man eine andere Gleichung. Klären Sie, ob es sich hierbei um dieselbe Gerade handelt.

Prüfungsvorbereitung

1) Führen Sie für die Funktion *f* mit $f(x) = -x^3 + 12\,x$ eine Kurvendiskussion durch.
Ermitteln Sie
   a) das Verhalten des Graphen von *f* im Unendlichen,
   b) die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen,
   c) die Extrempunkte und
   d) die Wende- bzw. Sattelpunkte.
   e) Handelt es sich um eine symmetrische Funktion? (Begründung)
   f) Zeichnen Sie den Graphen.

2) Gegeben ist eine Funktion *f* mit $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.
Bestimmen Sie:
   a) das Verhalten des Graphen von *f* im Unendlichen,
   b) die Nullstellen,
   c) die Extrema mit Minimum/Maximum-Entscheidung und
   d) die Wende- bzw. Sattelpunkte.
   e) Erstellen Sie eine Skizze von dem Graphen.

3) Führen Sie die Kurvendiskussion der Funktion *f* mit $f(x) = \frac{9}{64}x^4 - \frac{15}{16}x^3$ durch.
Bestimmen Sie
   a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen,
   b) die Schnittpunkte mit der x- und y-Achse,
   c) die Extrema und
   d) die Wende- bzw. Sattelpunkte.
   e) Stellen Sie die angegebene Funktion mit allen ermittelten Punkten graphisch dar.

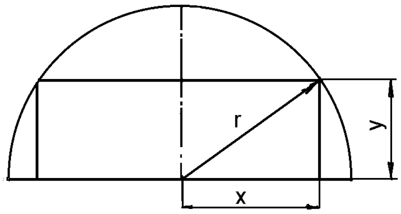
4) Bestimmen Sie die ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Punkt $P(0\,|\,0)$ einen Extrempunkt hat und an der Wendestelle $x_w = -1$ die Wendetangente $y = -x - {}^1/_3$ anliegt.

5) Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion *f* mit $f(x) = \frac{x^2 + 8x + 7}{1 - x}$
Ermitteln Sie
   a) das Verhalten des Graphen der Funktion *f* im Unendlichen sowie die Asymptoten,
   b) die Koordinaten der Nullstellen,
   c) die Polstellen,
   d) die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung und
   e) den Definitions- und Wertebereich.
   f) Fertigen Sie eine Skizze vom Graphen der Funktion *f* an.

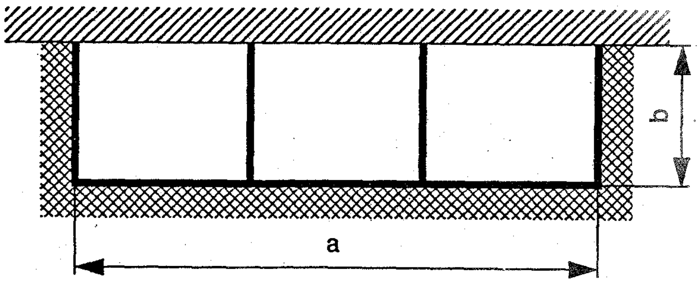
6) Für die Funktion *f* mit $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 1}$ sind zu berechnen:
   a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen, sowie die Asymptoten,
   b) die Koordinaten der Nullpunkte,
   c) die Pole,
   d) die Extrema (auf die 2. Ableitung wird verzichtet).
   e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion mit Asymptoten und Polstellen.

7) Der Graph einer Funktion 3.Ordnung hat seinen Wendepunkt in $W(0\,|\,1)$ und im Punkt $P(-2\,|\,3)$ eine horizontale Tangente. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

8) In einem halbkreisförmigen Bogen mit einem Radius von r = 4 m soll ein rechteckiges Fenster mit möglichst großer Fensterfläche eingesetzt werden. Bestimmen Sie die Breite x, die Höhe y und den maximalen Fensterflächeninhalt .



9) Für eine Neubausiedlung sollen Wasser-, Abwasser- und Telekomschacht in einem Dreikammerkanal zusammengefasst werden. Der Gesamtflächeninhalt des Querschnitts soll 4 m^2 betragen.
Wie groß müssen die Länge a und die Breite b gewählt werden, damit der Materialverbrauch minimal ist?



10) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion, die bei $x = 0$ eine Nullstelle besitzt und ihr Graph im Wendepunkt $W(4|-^4/_3)$ den Anstieg m = 1 hat.

11) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 + x + 9}{x - 1}$

sind zu bestimmen:

a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
b) die Koordinaten der Nullstellen,
c) die Polstellen und Lücken,
d) die Extrempunkte und
e) Wendepunkte.
f) Skizzieren Sie die Funktion.

12) Ein Flugzeug wird durch die Schubkraft F_s = 4,8 kN in konstanter Flughöhe geradlinig angetrieben. Der Wind übt eine gleichbleibende Kraft F_w = 3 kN in einem Winkel von etwa 70° zur Flugrichtung aus.

a) Welche Kraft wirkt insgesamt auf das Flugzeug?
b) Unter welchem Winkel zur gewünschten Flugroute muss Kurs gehalten werden, um an den Zielort zu gelangen?

Lösen Sie die Aufgabe graphisch und rechnerisch (algebraisch).

13) Welches gleichschenkliges Dreieck mit gegebenem Schenkel a = 10 cm hat den größten Flächeninhalt (auf die Minimum/Maximum-Entscheidung wird verzichtet)? Fertigen Sie eine Skizze an.

14) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

Bestimmen Sie den Punkt $P(a \mid f(a))$ auf der
Parabel so, dass der Inhalt der gekennzeichneten
Fläche A = 4 FE beträgt.

15) Von einer Radarstation werden zwei Flugzeuge geortet. Im rechtwinkligen räumlichen Koordinaten-
system $\{0;i;j;k\}$, in dessen Ursprung die Radarstation liegt, haben die Flugzeuge die Koordinaten
P_1 (10|4|1) und P_2 (13|16|5). Beide Flugzeuge fliegen auf den Punkt P_3 (22|8|5) zu (Angabe der Koordinaten in km).

a) Berechnen Sie den Abstand der Flugzeuge voneinander zum Zeitpunkt der Ortung.
b) Berechnen Sie den Winkel, der von den beiden als geradlinig angenommenen Flugkurven gebildet wird.

16) Die Punkte A (1|0|2), B (6|0|2) und C (6|4|–1) sind Punkte eines Dreiecks. Sie werden durch den
Punkt D zu einem Rechteck ergänzt.
Berechnen Sie:

a) die Koordinaten des Punktes D
b) die Längen der Mittelsenkrechten des Rechtecks und
c) den Mittelpunkt.
d) Welche Form hat das Rechteck?

17) Ein Transportcontainer hat die Maße 2,5 m x 1,2 m x 1,0 m.
Bestimmen Sie unter Beibehaltung des Volumens und der Länge l = 2,5 m die Maße für die Breite b und Höhe h eines zweiten Containers. Für dessen Herstellung soll der Materialverbrauch möglichst gering sein.

18) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ werden gesucht:

a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
b) die Koordinaten der Nullpunkte,
c) die Pole und eventuelle Lücken,
d) die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung,
e) die Wendepunkte (ohne 3. Ableitung) und
f) der Definitions- und Wertebereich.
g) Ist die Funktion an der Stelle x = –2 stetig? Antwort mit Begründung.
h) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f im Intervall I = [–5;4] an.

19) Gegeben sind die im Bereich IR definierten Funktionsscharen

$f(x) = -\frac{1}{a^2}x^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$ mit 0 < a < 1

a) Skizzieren Sie die zugehörigen Graphen der Funktionen f und g für a = 0,5.
b) Berechnen sie den von den Graphen zu f und g eingeschlossenen Flächeninhalt A(a) in Abhängigkeit von a.
c) Für welchen Wert von a wird der Flächeninhalt A(a) maximal?

20) Eine zum Ursprung punktsymmetrische Funktion 5. Grades hat bei N_1 ($\sqrt{10}$ | 0) und N_2 ($-\sqrt{10}$ | 0) je
eine Nullstelle und geht durch den Punkt P_1 (1 | 0.9). Die Wendetangente im Punkt P_2(0 | 0) hat den
Anstieg m = 0. Betimmen Sie die Funktion.

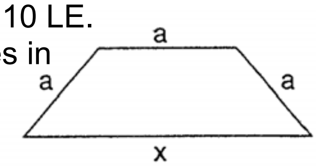
21) Gegeben ist die Kurvenschar mit $f_a(x) = -x^3 + a\,x$ mi t $x \in$ IR und a > 1. Der Graph der Funktion schließt mit der x-Achse ein Flächenstück ein, das von der Geraden $x = 1$ in zwei Teilflächen A_1 und A_2 geteilt wird.
Bestimmen Sie a so, dass gilt: $A_1 = A_2$.

22) In einem räumlichen Koordinatensystem liegen die Geraden g_1 und g_2.

g_1 : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \\ 15 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ mit $s \in$ IR $\quad$ g_2 : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2a \end{bmatrix}$ mit $t \in$ IR und $a \in$ IR

a) Bestimmen Sie den Spurpunkt S der Geraden g_1 mit der xy-Ebene.
b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an, die durch den Spurpunkt S geht und parallel zur z-Achse verläuft.
c) Beschreiben Sie die Lage der Geraden g_2 für a = 0.
d) Bestimmen Sie a so, dass die Geraden g_1 und g_2 parallel zueinander sind.
e) Für welchen Wert von a schneiden sich die Geraden g_1 und g_2 im Punkt B (6 | $-1/_7$)?

23) Die Seite a des dargestellten gleichschenkligen Trapezes ist 10 LE.



a) Zeigen Sie, dass der maximale Flächeninhalt des Trapezes in Abhängigkeit von x

$$A(x) = \frac{x+10}{4}\sqrt{300+20x-x^2}$$ ist.

b) Wie groß muss die Seite x des Trapezes gewählt werden, damit der Flächeninhalt maximal wird?
Hinweis: Auf A''(x) kann verzichtet werden.

24) Bestimmen Sie für die Funktion f mit $f(x) = -2x^3 - x^2 + 18x + 9$
a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen,
b) die Koordinaten der Nullstellen,
c) die Extrempunkte und
d) die Wendepunkte.
e) Skizzieren Sie die Funktion.

25) Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, deren Graph im Koordinatenursprung
eine Nullstelle und an der Stelle $x_E = -1$ ein Extrema hat. Der Anstieg der Wendetangente an
der Stelle $x_W = -\frac{1}{6}$ ist $m_W = -\frac{25}{12}$

26) Für die gebrochen rationale Funktion f mit $f(x) = \frac{10}{x^2 - 1}$ werden gesucht:

a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptoten,
b) die Koordinaten der Nullstellen,
c) die Pole und eventuelle Lücken,
d) die Extrempunkte mit Minimum/Maximum-Entscheidung,
e) die Wendepunkte und
f) der Definitions- und Wertebereich.
g) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Funktion f im Intervall I = [–4;4] an.

Hinweis: Erstellen Sie nur die Ableitungen, die benötigt werden.

27) Eine ganzrationale Funktion f ist gegeben durch $f(x) = x^3 - 2x + 2$.
Ermitteln Sie:

a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen
b) die Nullstellen im Intervall I = [–3;3] mit dem Newtonschen Näherungsverfahren mit einer Genauigkeit von $|f(x)| \leq |0{,}005|$.
c) Die Extrema und
d) die Wendepunkte bzw. Sattelpunkte.
e) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f mit allen ermittelten Punkten.

28) In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A $(1|-1|2)$, B $(3|0|-2)$ und C $(-2|1|0)$ gegeben, sowie der Punkt D $(a|a-2|a+1)$ mit $a \in \mathbb{R}$

a) Die Punkte A und B, sowie C und D legen jeweils eine Gerade fest. Ermitteln Sie die Gleichungen g und h_a dieser Geraden.
b) Zeigen Sie, dass keine dieser Geraden h_a parallel zur Geraden g verläuft.
c) Bestimmen Sie den Wert der Zahl a so, dass die zugehörige Gerade h_a die Gerade g schneidet, und berechnen Sie für dieses a ($a \in \mathbb{R}$) die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h_a.
d) Geben Sie mit Hilfe Ihres ermittelten Wertes für a die Geradengleichung für h an.
e) Ermitteln Sie den Schnittwinkel zwischen g und h.

29) Der Graph einer Funktion vierter Ordnung hat im Ursprung eine waagerechte Tangente und im Punkt W(–2|2) einen Wendepunkt mit waagerechter Tangente. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion.

30) Im räumlichen Koordinatensystem $\{0;i;j;k\}$ sind die Punkte A (–2|8|–2) und B (–4|10|10) gegeben.

a) Stellen Sie die Geradengleichung für die Gerade g, die durch A und B geht, auf.
b) Liegt der Punkt P_o (–2|2|8) auf der Geraden g?
c) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{A0}$ und $\overrightarrow{OP_0}$!
d) Die Gerade g durchstößt die yz-Ebene im Spurpunkt P_{yz} und die xz-Ebene in P_{xz}. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Spurpunkte.

31) Ein Grundstück hat einen rechteckigen Flächeninhalt von 3200 m^2 und wird an einer Stelle durch eine Mauer gegrenzt. Bestimmen Sie die Seiten so, dass sein Umfang möglichst klein wird.

32) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x - 1}$

Ermitteln Sie

a) das Verhalten des Graphen im Unendlichen sowie die Asymptote,
b) die Koordinaten der Nullpunkte,
c) die Polstellen, die Extrempunkte ohne Minimum/Maximum-Entscheidung, Skizze vom Graphen der Funktion f.