Oberstufenzentrum
Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 12. Klasse (Teil 2)

Lehnen

Stand 5.2005

Differenzialrechnung

Informationsblatt

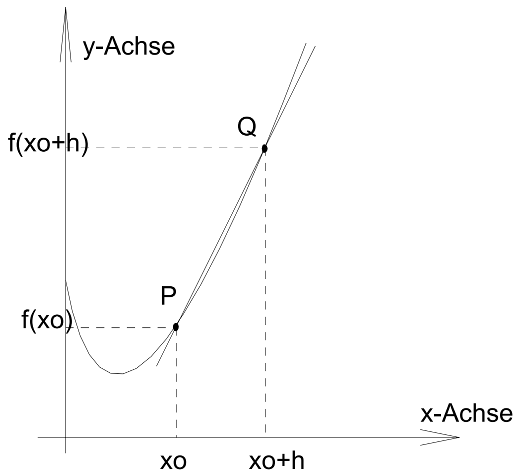
Thema: Einführung in die Differentialrechnung

Der Differenzenquotient ist gleich der Steigung m der Gerade durch die Punkte $P(x_0|f(x_0))$ und $Q(x_0+h|f(x_0+h))$ (siehe Abbildung). Diese Gerade wird auch als Sekante bezeichnet. Die Steigung ergibt sich aus dem Steigungsdreieck zu:

$$m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Da es sich hierbei um einen Quotienten (Bruch) zweier Differenzen handelt, wird dieser als Differenzenquotient bezeichnet.

Strebt auf dem Graphen von f der variable Punkt Q gegen den Punkt P, dann ändert sich im allgemeinen auch der Anstieg der entsprechenden Sekante. Der Abstand h der Stellen auf der x-Achse wird immer kleiner und geht gegen Null ($h \to 0$). Geometrisch bedeutet das, daß die Sekante in eine Grenzgerade übergeht, die nur noch den Punkt P (innerhalb einer Umgebung) mit dem Graphen gemeinsam hat. Diese Gerade wird als Tangente an den Graphen von f im Punkt P bezeichnet. Die Steigung der Tangente ist der Grenzwert der Sekantensteigungen und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet und Ableitung von f an der Stelle x_0 genannt.



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Wird h durch eine Nullfolge ersetzt (z.B. $h_n = \frac{1}{n}$), so sieht der Grenzwert folgendermaßen aus:

$$f'(x_0) = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0)}{\frac{1}{n}}$$

Anhand dieser Formeln kann die Steigung einer Funktion f an der Stelle x_0 berechnet werden.

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$, gesucht ist $f'(3)$, also die 1. Ableitung der Funktion f an der Stelle $x_0=3$.

Lösungsweg mit der ersten Formel:

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 + 2 - 11}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 + 2 - 11}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (6 + h) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Lösungsweg mit der zweiten Formel:

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{n \to \infty} \frac{f(3+\frac{1}{n}) - f(3)}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{(3+\frac{1}{n})^2 + 2 - 11}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{9 + 6\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + 2 - 11}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} \frac{6\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to \infty} (6 + \frac{1}{n}) \\
&= 6
\end{aligned}$$

Ableitungsregeln:

Konstantenregel:

$$c' = 0$$

Potenzregel:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \;; n \in \mathbb{N}$$

Faktorregel:

$$(a \cdot u(x))' = a \cdot u'(x)$$

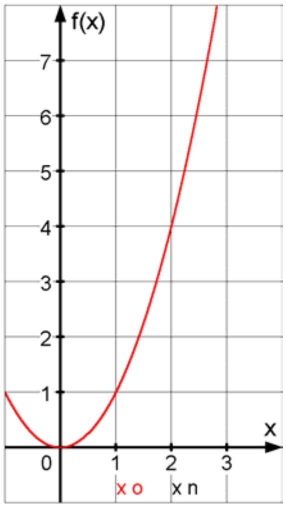
Summenregel:

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$$

Arbeitsblatt

Einführung in die Differentialrechnung

Gegeben ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$; $x \in \mathrm{IR}$.



Die Sekantensteigungen errechnen sich aus:

$$m_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

Die Werte x_n können als Glieder der Folge (x_n) dargestellt werden:

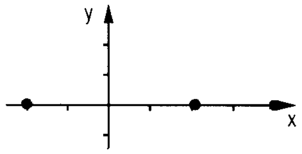
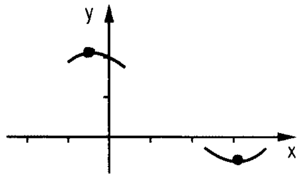
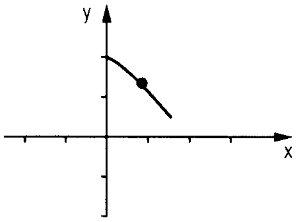
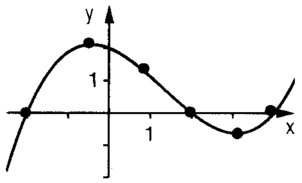
$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

1. Berechnen Sie die Werte von $x_n, f(x_n)$ und m_n für n = 1,2,3,4,10 und 100 und tragen Sie diese in die Tabelle ein.

n	x_0	$f(x_0)$	x_n	$f(x_n)$	m_n
1	1	1	2	4	3
2	1	1			
3	1	1			
4	1	1			
10	1	1			
100	1	1			

2. Welchem Wert nähern sich die Steigungswerte m_n ?

Informationsblatt
–Funktionsuntersuchung / Kurvendiskussion–

I. Nullstellen 	Löse $f(x) = 0$ nach x auf. Die Lösungen x_N sind die **Nullstellen** der Funktion f.
II. Hoch- / Tiefpunkte 	a. Löse $f'(x_E) = 0$ nach x auf. Die Lösungen x_E werden untersucht: b. Wenn $f''(x_E) < 0$, dann liegt an der Stelle x_E ein lokales **Maximum** vor. Der Punkt $H(x_E\,; f(x_E))$ heißt lokaler **Hochpunkt**. Wenn $f''(x_E) > 0$, dann liegt an der Stelle x_E ein lokales **Minimum** vor. Der Punkt $T(x_E\,; f(x_E))$ heißt lokaler **Tiefpunkt**.
III. Wendepunkte 	a. Löse $f''(x) = 0$ nach x auf. Die Lösungen x_W werden untersucht: b. Wenn $f'''(x_W) \neq 0$, dann ist die Stelle x_W eine **Wendestelle**. Der Punkt $W(x_W\,; f(x_W))$ heißt **Wendepunkt.**
IV. Graph 	Trage die charakteristischen Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem ein und skizziere den Graphen.

Thema: Funktionsuntersuchung/Kurvendiskussion

1. **Symmetrie**:

$f(x) = f(-x) \Leftrightarrow$ Symmetrie zur y-Achse
$f(x) = -f(-x) \Leftrightarrow$ Symmetrie zum Ursprung

2. **Nullstellen**:

Die Lösungen der Gleichung $f(x_N) = 0$ sind die Nullstellen der Funktion f.

3. **Relative Extrempunkte**:

$f'(x_E) = 0$ wird nach x_E aufgelöst. Die Lösungen $x_{E1}, x_{E2}, \ldots$ werden untersucht:

Wenn $f''(x_E) < 0$, dann ist x_E Maximalstelle und $f(x_E)$ Maximum von f. Der Punkt $(x_E; f(x_E))$ heisst Hochpunkt des Graphen von *f.*

Wenn $f''(x_E) > 0$, dann ist x_E Minimalstelle und $f(x_E)$ Minimum von f. Der Punkt $(x_E \mid f(x_E))$ heisst Tiefpunkt des Graphen von f.

4. **Wendepunkte**:

$f''(x_W) = 0$ wird nach x_W aufgelöst. Die Lösungen $x_{W1}, x_{W2}, \ldots$ werden untersucht:

Wenn $f'''(x_W) \neq 0$, dann ist x_W Wendestelle von *f.* Der Punkt $(x_W \mid f(x_W))$ heisst Wendepunkt des Graphen von *f.*

Ist zusätzlich $f'(x_W) = 0$, so nennt man den zugehörigen Wendepunkt **Sattelpunkt.**

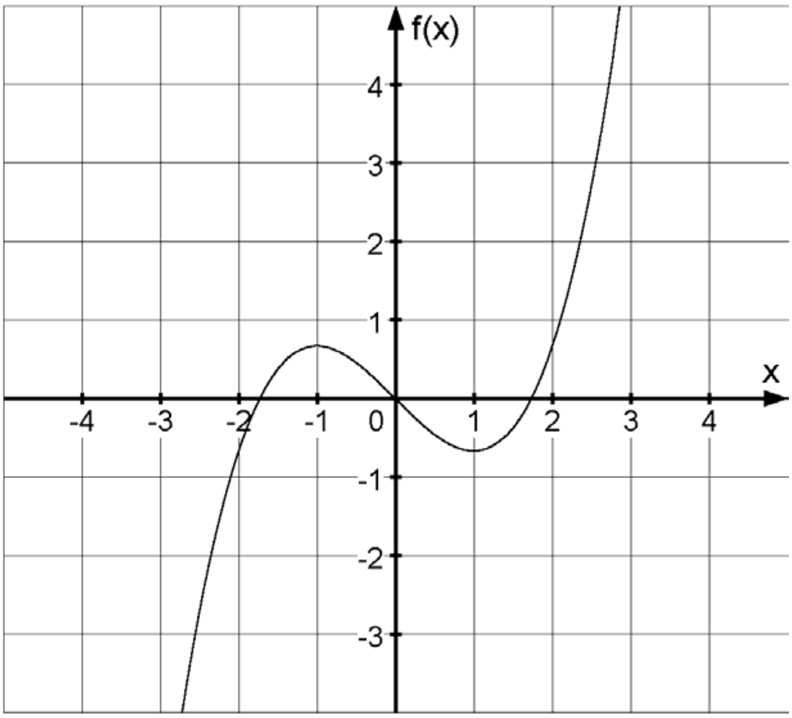
Technisch-physikalische Bedeutung des Differentialbegriffs

Der Funktionswert der Ableitungsfunktion f' gibt die Steigung des Graphen der Ausgangsfunktion f an einer bestimmten Stelle an. In den Naturwissenschaften und der Technik hat die Ableitungsfunktion weitere Interpretationen. Statt die Funktionen ständig mit f zu bezeichnen, verwendet man üblicherweise die in der jeweiligen Fachrichtung gebräuchlichen Namen. Die Wegfunktion bekommt den Namen s (deutsch: Strecke), die Geschwindigkeitsfunktion den Namen v (franz. vitesse) und die Beschleunigungsfunktion den Namen a (engl. acceleration).

Ausgangsfunktion	**Ableitung**	**Zusammenhang**
Ladung $q(t)$	$i(t) = \dot{q}(t)$	Beim Stromfluss durch einen elektrischen Leiter ist die Stromstärke $i(t)$ die erste Ableitung der elektrischen Ladung $q(t)$ nach der Zeit t.
Stromstärke $i(t)$	$u(t) = L \cdot i(t)$	Fließt durch eine Spule der Induktivität L ein zeitlich veränderlicher Strom der Stromstärke $i(t)$, so ergibt sich die elektrische Spannung $u(t)$ als Produkt aus Induktivität und der Ableitung der Stromstärke nach der Zeit.
Weg $s(t)$	$v(t) = \dot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ gleich der ersten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit.
Geschwindigkeit $v(t)$	$a(t) = \dot{v}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der ersten Ableitung des Weges $v(t)$ nach der Zeit t.
Weg $s(t)$	$a(t) = \ddot{s}(t)$	Bei einer geradlinigen Bewegung ist die Beschleunigung $a(t)$ gleich der zweiten Ableitung des Weges $s(t)$ nach der Zeit t.
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$	Die augenblickliche Lage eines Massenpunktes bei einer Drehbewegung wird durch den zeitabhängigen Winkel $\varphi(t)$ beschrieben. Die Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ ist die erste Ableitung des Drehwinkels $\varphi(t)$ nach der Zeit t.
Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$	$\alpha(t) = \dot{\omega}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die erste Ableitung der Winkelgeschwindigkeit $\omega(t)$ nach t.
Drehwinkel $\varphi(t)$	$\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t)$	Die Winkelbeschleunigung $\alpha(t)$ ist die zweite Ableitung der Drehwinkels $\varphi(t)$ nach t.

Ableitungsfunktion/Monotonieverhalten

1. Zu untersuchen ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x;\ x \in \mathrm{IR}$.



1.1 Berechnen Sie die Ableitungsfunktion f'.

1.2 Zeichnen Sie den Graphen der Ableitungsfunktion für das Intervall $-2 \le x \le 2$.

1.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.

Übungsaufgaben zum Thema: ganzrationale Funktionen

Symmetrieverhalten

1. Entscheiden Sie, ob die Graphen der Funktionen *f*, *g*, *h* und *i* achsensymmetrisch zur y-Achse bzw. punktsymmetrisch zum Ursprung sind, oder ob keine Symmetrie der genannten Art vorliegt. Begründen Sie ihre Entscheidung. Bei 1.2 und 1.3 ist der Beweis **rechnerisch** durchzuführen.

   1.1 $f(x) = -\frac{1}{2}x^3$

   1.2 $g(x) = x^4 + x^2 + 16$

   1.3 $h(x) = (x-2)^2 + 3x$

   1.4 $i(x) = \sqrt{3}$

Nullstellen ganzrationaler Funktionen

2. Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$; $x \in \mathrm{IR}$.

   2.1 Wie viele Nullstellen kann die Funktion *f* maximal haben? Begründung.
   2.2 Versuchen Sie eine Nullstelle durch Probieren zu finden. Berechnen Sie danach die weiteren Nullstellen mit Hilfe der Polynomdivision.
   2.3 Schreiben Sie den Funktionsterm $f(x)$ als Produkt von Linearfaktoren.

3. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion *g* mit $g(x) = x^4 - 5x^2 + 4$; $x \in \mathrm{IR}$. Hinweis: Ganzrationale Funktionen vom Grad 4 dieses Typs heißen *biquadratische* Funktionen.

Arbeitsblatt: Ableitungen

1. Bestimmen Sie die Ableitungsfunktionen von f und berechnen Sie jeweils $f(x) = x^3 - 9x;\ x \in \mathrm{IR}$..

   a. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 9x + 1$

   b. $f(x) = x^{96} - x^{63} + \sqrt{2}$

   c. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

   d. $f(x) = \dfrac{2x^3 - 6x^2 + 5x - 14}{7}$

   e. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}x^3 + \dfrac{\pi}{2}x^2 + 2\sqrt{x} - \dfrac{10}{x}$

Ableitungsregeln

1. **Konstantenregel**: $c' = 0$
2. **Potenzregel**: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}; n \in Q$
3. **Faktorregel**: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$
4. **Summenregel**: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
5. **Kettenregel**: $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
6. **Produktregel**: $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
7. **Quotientenregel**: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

Arbeitsblatt im Fach Mathematik
Kurvendiskussion

1. Zu untersuchen ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 9x;\ x \in \mathrm{IR}$. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f sowie das Symmetrieverhalten, die Hoch/ Tiefpunkte, die Wende- und Sattelpunkte des Graphen von f. Führen Sie Ihre Berechnungen auf einem separaten Blatt durch, und übertragen Sie die Ergebnisse auf das Arbeitsblatt.

Symmetrieverhalten:

Nullstellen:

Hochpunkte:

Tiefpunkte:

Wende- und Sattelpunkte:

Funktionsuntersuchung ganzrationaler Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3\,;x \in \mathrm{IR}$.

   1.1 Bestimmen Sie die *Symmetrieeigenschaft* des Graphen von f.

   1.2 Bestimmen Sie die *Nullstellen* von f.

   1.3 Geben Sie Art und Lage der *Extrempunkte* des Graphen von f an.

   1.4 Bestimmen Sie die *Wendepunkte* des Graphen von f und überprüfen Sie, ob es sich hierbei um *Sattelpunkte* handelt.

   1.5 Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

   1.6 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und kennzeichnen Sie die oben berechneten Punkte.

   1.7 Geben Sie das *Krümmungsverhalten* des Graphen von f an und bestimmen Sie das *Monotonieverhalten* der Funktion f.

Symmetrie	Nullstellen	Hochpunkte	Tiefpunkte	Wendepunkte

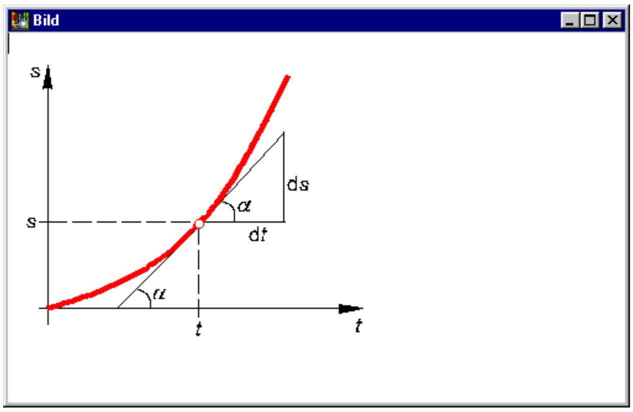
Beispiele für lokale Änderungsraten

x	$f(x)$	$f'(x)$
Abszisse	Ordinate	Graphensteigung
Abszisse	Flächeninhalt bis x	Ordinate bei x
Höhe	Rauminhalt bis x	Querschnitt bei x
Radius	Kreisflächeninhalt	Kreisumfang
Quadratseite	Quadratflächeninhalt	Halber Umfang
Zeit	Weg	Momentangeschwindigkeit
Zeit	Geschwindigkeit	Beschleunigung
Zeit	Energie	Leistung
Zeit	Winkel	Winkelgeschwindigkeit
Zeit	Durchflußvolumen bis x	Stromstärke des Flusses bei x
Zeit	Elektrische Ladung	Elektrische Stromstärke
Zeit	Temperatur	Temp.-Änderungsgeschwindigk.
Weg	Intensität	Intensitätsänderungsrate
Länge	Masse bis x	Dichte bei x
Länge	Temperatur	Lokales Temperaturgefälle
Wellenlänge	Ausstrahlungsenergie	Energiedichte
Temperatur	Länge	Expansionskoeffizient
Temperatur	Wärmeinhalt	Spezifische Wärme
Stärke Meßobjekt	Anzeige Meßgerät	Empfindlichkeit Meßgerät
Reizstärke	Empfindungsstärke	Empfindlichkeit eines Sinns
Zeit	Behaltenes bis x	Behaltensrate bei x
Zeit	Chem. Konzentration	Chem. Reaktionsgeschwindigkeit
Zeit	Masse chem. Substanz	Auflösungsgeschwindigkeit
Zeit	Quantität Population	Wachstumsgeschwindigkeit
Zeit	Anzahl Infizierter	Ausbreitungsgeschw. Epidemie
Zeit	Anzahl Informierter	Ausbreitungsgeschw. Nachricht
Einkommen	Einkommenssteuer	Spitzensteuersatz
Ausbringung	Kosten	Grenzkosten
Ausbringung	Erlös	Grenzerlös
Ausbringung	Wert	Grenznutzen
Zeit	Geldwert	Inflationsrate
Zeit	Anzahl Scheidungen bis x	Scheidungsrate bei x

Momentangeschwindigkeit

Das s, t-Diagramm zeigt den in bestimmten Zeiten zurückgelegten Weg. Je steiler die Kurve, desto größer ist die Momentangeschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt.

Wenn
α: Winkel zwischen Tangente und t-Achse,
v: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t,
s: Weg, der bis zum Zeitpunkt t zurückgelegt wurde,
dann gilt $v = \tan\alpha$.

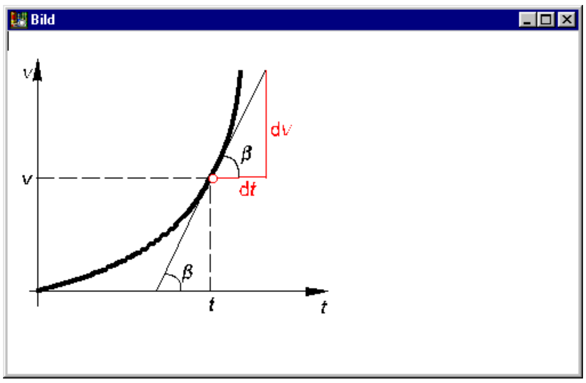


Die Momentangeschwindigkeit ist die 1. Ableitung der *s*, *t*-Funktion nach der Zeit.

Momentanbeschleunigung

Das v, t-Diagramm zeigt die zu bestimmten Zeiten vorhandene Geschwindigkeit. Je steiler die Kurve, desto größer ist die Momentanbeschleunigung zu diesem Zeitpunkt.

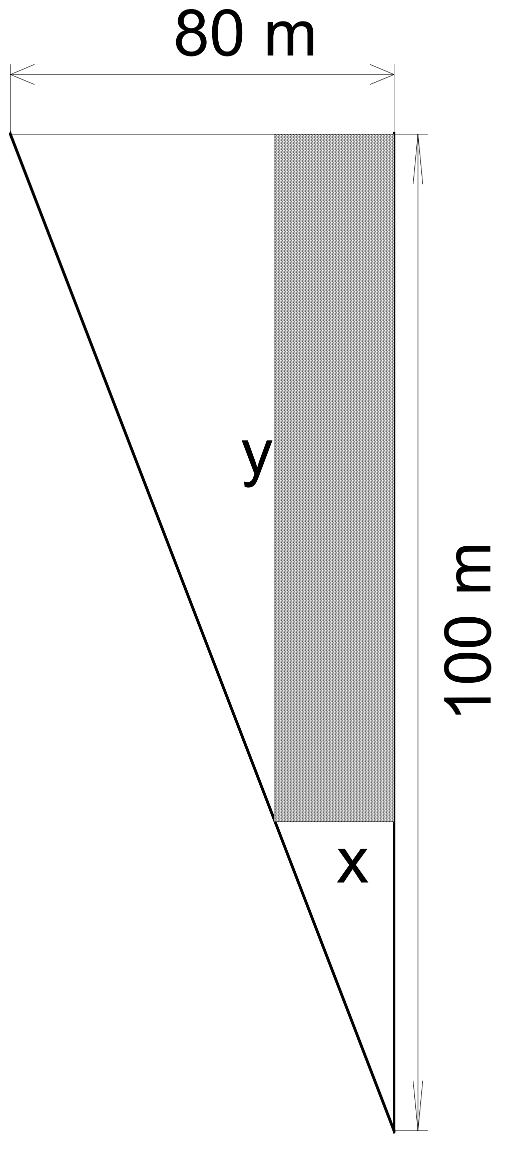
Wenn
β: Winkel zwischen Tangente und t-Achse,
a: Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t,
v: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t,
dann gilt $a = \tan\beta$.



Die Momentanbeschleunigung ist die 1. Ableitung der *v*, *t*-Funktion nach der Zeit bzw. die 2. Ableitung der *s*, *t*-Funktion nach der Zeit.

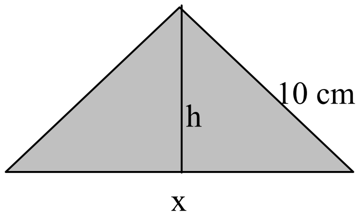
Arbeitsblatt

Auf einem Baugrundstück, das die Form eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Kathetenlängen 80 m und 100 m hat, soll eine Großmarkthalle mit rechteckigem Grundriss errichtet werden. Wie sind Lage und Abmessungen zu wählen, damit die Grundfläche der Halle maximal wird?



Extremalprobleme

1. Untersuche, welches gleichschenklige Dreieck mit der Schenkellänge 10 cm den größten Flächeninhalt hat.



2. Einem Kegel (Radius $R = 5$ und Höhe $H = 10$) soll ein Zylinder (Radius r und Höhe h) so eingeschrieben werden, dass das Volumen V des Zylinders maximal wird.

2.1. Fertige eine Skizze des Problems an (Schnittdarstellung).

2.2. Gib die Hauptbedingung und die Nebenbedingung an, und zeige, dass $V(r) = -2\pi r^3 + 10\pi r^2$ die Funktionsgleichung der Zielfunktion ist.

2.3. Berechne die Höhe h und den Radius r, für die V maximal wird.

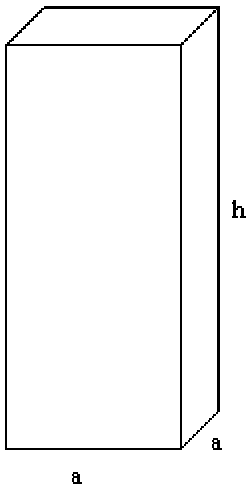
Gottfried Wilhelm Leibniz
geb. 1.7.1646 Leipzig
gest.14.11.1716 Hannover

"Denn meine Regel ist, daß in der Natur nichts unerclärlich ist, obschohn uns die Erclärung unbekand."
Leibniz studierte in Leipzig seit 1661 Philosophie, seit 1664 die Rechte und promovierte 1667. Eine ihm angebotene Professor lehnte er ab. In Nürnberg lernte Leibniz einen ehemaligen Minister kennen und folgte diesem nach Mainz.
1672 reiste er im Auftrag des Fürsten nach Paris und beschäftigte sich neben seinen politischen Aufgaben vorwiegend mit Mathematik. 1673 besuchte er London und wurde wenig später Mitglied der Royal Society.
1676 siedelte er nach Hannover über, von 1687-90 befand er sich in Italien und nach 1700 desöfteren in Berlin und Wien. Leibniz war von erstaunlicher Vielseitigkeit. Er verfaßte die Monadenlehre zur Philosophie, schrieb über Theologie, Sprachphilosophie, Auswertung von Archivmaterialien, Geschichte, Mechanik, Logik und Mathematik sowie eine Vielzahl von Gutachten zu wirtschaftlichen, politischen und finanztechnischen Fragen. Seine mathematischen Leistungen liegen vor allem auf dem Gebiet der Infinitesimalrechnung und der Formalisierung der Mathematik. Seine 1673 entwickelten "Calculus" veröffentlichte er 1682. Er enthält Differentiationszeichen, Regeln zum Differenzieren, Aussagen über Extremwerte und Wendepunkte. 1686 folgte eine Arbeit, die das Integrationszeichen enthielt. Daneben behandelt Leibniz Spezialprobleme der Algebra. Die mehr formalen Bestrebungen führten Leibniz zur Kombinatorik, zur symbolischen Logik und zu den Determinanten. Auf Leibniz gehen die Ausdrücke Differentialund Integralrechnung, Funktion und Koordinaten zurück. Er setzte das Gleichheitszeichen, den Multiplikationspunkt sowie die Bezeichnung durch Indizes durch. Vor 1673 entwickelte er eine Rechenmaschine. Er war 1700 Begründer und 1703 der erste

Säule aus Draht

Aus einem Stück Draht, das 36 cm lang ist, soll eine "Säule" mit quadratischem Grundriß geformt werden. Welches ist das maximal mögliche Volumen der Säule?

In dieser Aufgabe ist eine Länge gegeben (des Drahtes).
Wenn die Säule aus Draht geformt werden soll, ist wohl gemeint, daß mit dem Draht die Kanten der Säule gebildet werden sollen. Der Draht muß ausreichen, um daraus die Gesamtlänge aller Kanten zu bilden.



Die Nebenbedingung lautet

$$8\,a + 4\,h = 36$$

Die "quadratische" Säule hat eine quadratische Grundfläche a*a und eine Höhe h. Das Volumen soll maximiert werden. Wie lautet die Zielfunktion?
Das Volumen einer Säule ist Grundfläche mal Höhe. Die Grundfläche ist a^2, die Hühe h. Als Zielfunktion haben wir:

$$V = a^2 * h$$

Hinweis (weil die Frage schon mal kam): Hier eine Nebenbedingung mit der Oberfläche zu setzen, entspricht nicht der Aufgabe.
Indem die Nebenbedingung 8a+4h=36 nach (z.B.) h aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt wird, erhält man die Funktion des Volumens in Abhängigkeit von a:

$$F(a) = a^2 * (9-2a)$$

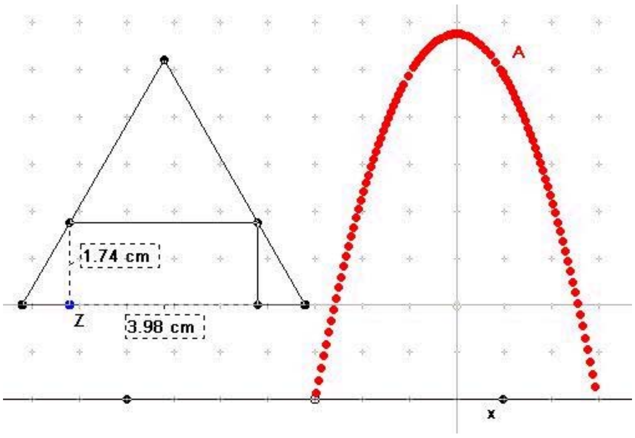
Die Lösung lautet schließlich: a=h=3.
Das Volumen der Säule ist maximal, wenn sie ein Würfel (Kubus) ist.

Übungen zur Analysis

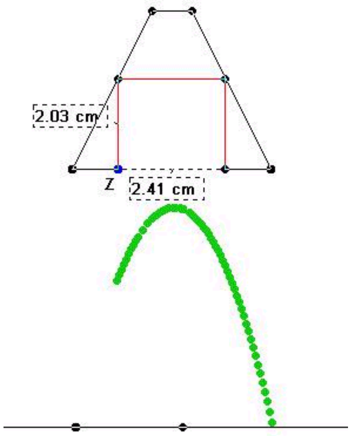
Prüfungsvorbereitung: Extremwertaufgaben

1. Zerlege 15 so in eine Summe, dass das Produkt maximal ist. Lösung: $x = 7{,}5$

2. Einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge 6cm wird ein Rechteck so einbeschrieben, dass eine Rechteckseite x auf einer Dreieckseite liegt und die anderen Eckpunkte des Rechtecks auf den beiden anderen Dreieckseiten liegen.
   2.1. Der Flächeninhalt A des einbeschriebenen Rechtecks hängt von der Seitenlänge x ab. Gib die Funktion A durch ihre Funktionsgleichung an.
   2.2. Bestimme eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion A.
   2.3. Zeichne in einem Koordinatensystem den Graphen der Funktion A.
   2.4. Für welche Maße x wird der Inhalt des einbeschriebenen Rechtecks am größten? Wie groß ist der maximale Inhalt?



3. Einem gleichseitigen Trapez (Grundseiten a =10cm, c = 2cm, Höhe h = 8cm) werden analog wie beim Dreieck Rechtecke einbeschrieben.
   3.1. Der Flächeninhalt A des einbeschriebenen Rechtecks hängt von der Seitenlänge x ab. Gib die Funktion A durch ihre Funktionsgleichung an.
   3.2. Bestimme eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion A.
   3.3. Zeichne in einem Koordinatensystem den Graphen der Funktion A.
   3.4. Für welche Maße x wird der Inhalt des einbeschriebenen Rechtecks am größten? Wie groß ist der maximale Inhalt?



Thema: Rekonstruktion von ganzrationalen Funktionen

Ansatz für eine ganzrationale Funktion

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$$

Bsp: $f(x) = 3x^5 + 7x^2 + x + 5$

Hinweis: Der Grad der Funktion gibt die höchste Potenz von x an. (Im Beispiel Grad = 5).

Ist der Funktionsgraph **punktsymmetrisch** zum Ursprung, so fallen alle Potenzen von x mit geraden Exponenten weg. Beispiel für eine punktsymmetrische Funktion: $f(x) = 5x^3 + 2x$.

Ist der Funktionsgraph **achsensymmetrisch** zur y-Achse, so fallen alle Potenzen von x mit ungeraden Exponenten weg. Beispiel für eine achsensymmetrische Funktion: $f(x) = 4x^6 + 3x^2 + 4$.

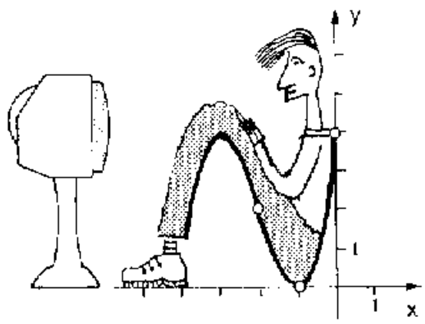
Tips zur Rekonstruktion:

Hinweise in der Aufgabenstellung	Interpretation:
Punkt $P(x;y)$ ist gegeben	$f(x) = y$
Hochpunkt $H(x;y)$ ist gegeben	$f(x) = y$ und $f'(x) = 0$
Tiefpunkt $T(x;y)$ ist gegeben	$f(x) = y$ und $f'(x) = 0$
Wendepunkt $W(x;y)$	$f(x) = y$ und $f''(x) = 0$
Sattelpunkt $S(x;y)$ ist gegeben	$f(x) = y$ und $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$
Steigung im Punkt *P* beträgt 4	$f'(x) = 4$
Graph geht durch den Ursprung	$f(0) = 0$
Graph schneidet die y-Achse bei y=3	$f(0) = 3$
Nullstelle bei x = 5	$f(5) = 0$

Übungen zur Analysis

Rekonstruktion von Funktionen

1. Bestimme die Gleichung der abgebildeten Profilkurve.



2. Bestimme die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

- f ist eine Funktion fünften Grades.
- Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1$ einen Wendepunkt, während in P (-1|1) die Steigung $m = -9$ vorliegt.

3. Nenne 3 Anwendungen der Differentialrechnung in der Technik oder anderen Wissenschaftszweigen.

4. Welche ganzrationale Funktion 4. Grades hat einen Graphen, der symmetrisch zur y-Achse ist, für $x = 2$ eine Tangente mit der Gleichung $y = -4x + 13$ und an der Stelle $x = 1$ die Steigung $m = 1$ besitzt ?

5. Welche ganzrationale Funktion 3. Grades hat einen Graphen, der in $O\,(0\,|\,0)$ einen Tiefpunkt und in $A\,(2\,|\,3)$ einen Hochpunkt hat?

Übungsklausur zur 3. Klausur im Fach Mathematik (Le)

Thema: Rekonstruktion von Funktionen

1. Bestimme die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

   - f ist eine Funktion dritten Grades.
   - Der Punkt P(0|0) liegt auf dem Graphen von f.
   - Der Graph hat einen Wendepunkt in W(6|2).
   - Die Steigung der Tangente im Wendepunkt W(6|2) beträgt –1.

2. Bestimme die Funktionsgleichung der ganzrationalen Funktion f mit den folgenden Eigenschaften:

   - f ist eine Funktion vierten Grades.
   - Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse und geht durch den Ursprung.
   - Der Graph hat einen Wendepunkt in W(1|-2,5).

Lösungen:

1. $f(x) = \frac{1}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 3x$
2. $f(x) = 0{,}5x^4 - 3x^2$

Ableitungen fundamentaler Funktionen

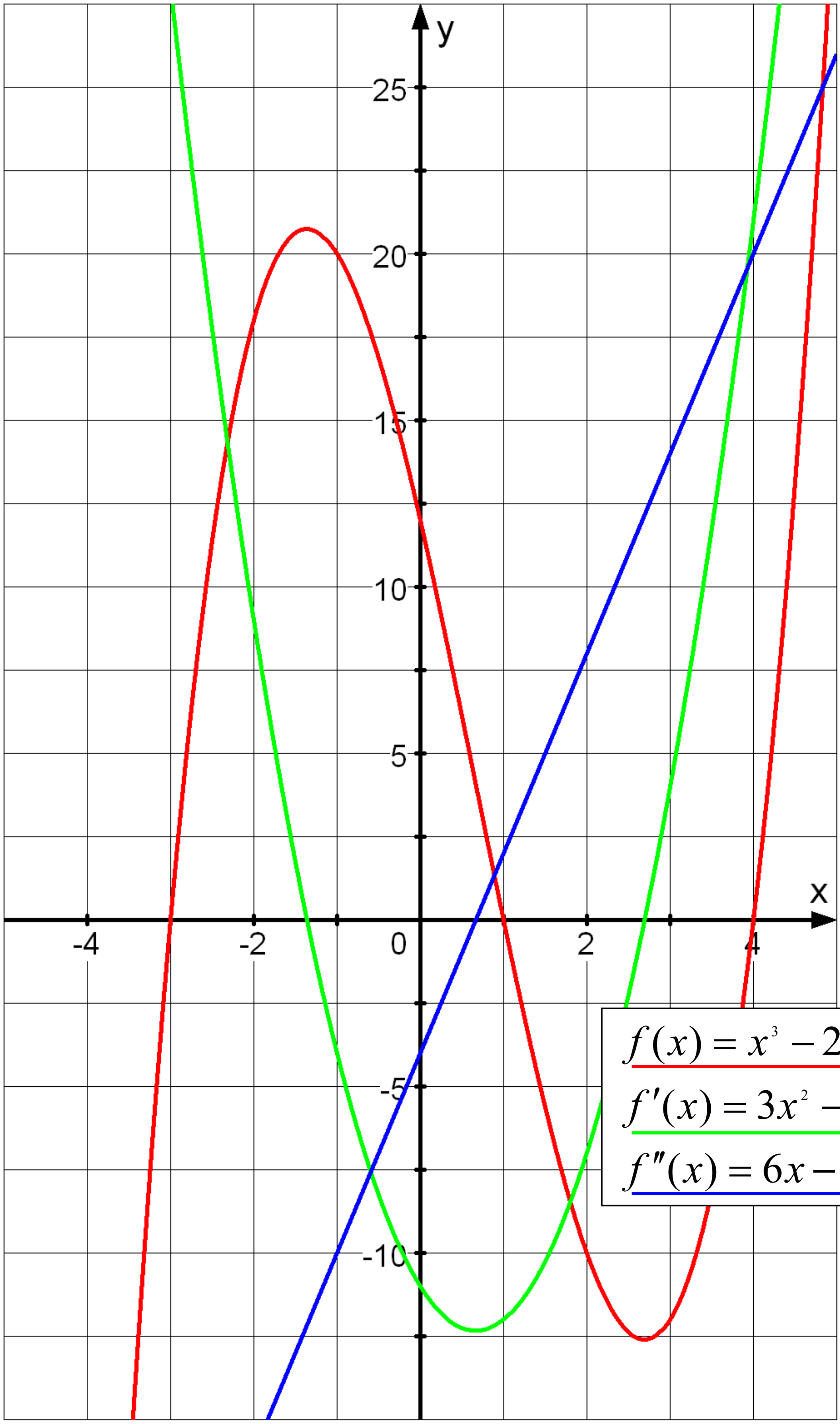
ganzrationale Funktionen, abgeleitet nach Kettenregel	
f (x)	**f ' (x)**
$(2x - 3)^5$	$5(2x - 3)^4 \cdot 2$ $= 10(2x - 3)^4$
$(0{,}5x + 5)^2$	$2(0{,}5x + 5) \cdot 0{,}5$ $= 0{,}5x + 5$
$(x^2 - 3)^5$	$5(x^2 - 3)^4 2x$ $= 10x(x^2 - 3)^4$
$(3x^2 - 5)^2$	$2(3x^2 - 5)^1 6x$ $= 12x(3x^2 - 5)$
$(x^3 + 1)^4$	$4(x^3 + 1)^3 3x^2$ $= 12x^2 (x^3 + 1)^3$
$(x^4 + 1)^3$	$3(x^4 + 1)^3 4x^3$ $= 12x^3 (x^4 + 1)^2$
$(4x^5 + 3x)^3$	$3(4x^5 + 3x)^2(20x^4+3)$ $= (60x^4+9)(4x^5 + 3x)^2$
$(7 - 8x)^9$	$9(7 - 8x)^8(- 8)$ $= -72(7 - 8x)^8$
$(8 - 7x)^9$	$9(8 - 7x)^8(- 7)$ $= -63(7 - 8x)^8$
$(x^2 + 6x + 7)^4$	$4(x^2 + 6x + 7)^3(2x+6)$ $= (8x+24)(x^2 + 6x + 7)^3$

gebrochenrationale Funktionen, abgeleitet nach Quotientenregel	
f (x)	**f ' (x)**
$(7x + 5) / (x + 2)$	$(7(x + 2) - (7x + 5)1) / (x + 2)^2$ $= (7x + 14 - 7x - 5) / (x + 2)^2$ $= 9 / (x + 2)^2$
$(3x - 4) / (2x - 1)$	$(3(2x - 1) - (3x - 4)2) / (2x - 1)^2$ $= (6x - 3 - 6x + 8) / (2x - 1)^2$ $= 5 / (2x - 1)^2$
$(x^2 + 3) / (x - 1)$	$(2x(x - 1) - (x^2 + 3)1) / (x - 1)^2$ $= (2x^2 - 2x - x^2 - 3) / (x - 1)^2$ $= (x^2 - 2x - 3) / (x - 1)^2$

trigonometrische Funktionen	
f (x)	**f ' (x)**
sin x	cos x
sin (2x)	2 cos (2x)

$\sin x^2$	$2x \cos x^2$
$\sin (x-4)$	$\cos (x - 4)$
$\sin (2x+4)$	$2 \cos (2x+4)$
$\sin (x^2-4)$	$2x$ cox (x^2-4)
$\sin (1/x)$	$-1/x^2 \cos (1/x)$
$\sin (1/x^2)$	$-2/x^3 \cos (1/x^2)$
$\sin (1/(x+1))$	$-1/(x+1)^2 \cos (1/(x+1))$
$3 \cos x$	$- 3 \sin x$
$6x - 5 \cos x$	$6 + 5 \sin x$
$\cos x/4$	$-1/4 \sin (x/4)$
$3/4 - \cos x/4$	$1/4 \sin (x/4)$
$\cos^2 x$	$-2 \sin x \cos x$
$1/ \cos x$	$\sin x / \cos^2 x$
$\tan (6x+1)$	$6 / \cos^2 (6x+1)$
$\cos (1/x)$	$1/(x^2 \sin^2 (1/x))$

ganzrationale Funktionen, abgeleitet nach Produktregel	
f (x)	**f ' (x)**
$x (x + 7)$	$1 \cdot (x + 7) + x \cdot 1$ $= 2x + 7$
$(x + 1) (x + 7)$	$1 \cdot (x + 7) + (x + 1) \cdot 1$ $= x + 7 + x + 1$ $= 2x + 8$
$(x^2 + 1) (x + 7)$	$2x \cdot (x + 7) + (x^2 + 1) \cdot 1$ $= 3x^2 + 14x + 1$
$(x^2 + x) (x + 7)$	$(2x + 1) \cdot (x + 7) + (x^2 + x) \cdot 1$ $= 2x^2 + x + 14x + 7x+ x^2 + x$ $= 3x^2 + 16x + 1$
$(x^2 + x) (x^2 + 7)$	$(2x + 1) (x^2 + 7) + (x^2 + x) \cdot 2x$ $= 2x^3 + x^2 + 14x + 7 + 2x^3 + 2x^2$ $= 4x^3 + 3x^2 + 14x + 7$
$(x^2 - 3) (x^4 + 3x^3)$	$2x (x^4 + 3x^3) + (x^2 - 3)(4x^3 + 9x^2)$ $= 2x^5 + 6x^4 + 4x^5 - 12x^3 + 9x^4 - 27x^2$ $= 6x^5 + 15x^4 - 12x^3 - 27x^2$
$(4x^3 - 2x)(5x^3 - 18x^2)$	$(12x^2 - 2)(5x^3 - 18x^2) + (4x^3 - 2x)(15x^2 - 36x)$ $= 60x^5 - 10x^3 - 216x^4 + 36x^2 + 60x^5 - 30x^3 - 144x^4 + 72x^2$ $= 120x^5 - 360x^4 - 40x^3 + 108x^2$
$(3x^3 - 5x^2)(x^3 + 2)$	$(9x^2 - 10x)(x^3 + 2) + (3x^3 - 5x^2)3x^2$ $= 9x^5 - 10x^4 + 18x^2 - 20 x + 9x^5 - 15x^4$ $= 18x^5 - 25x^4 + 18x^2 - 20x$



$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 11x + 12$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 11$$

$$f''(x) = 6x - 4$$