Oberstufenzentrum Kraftfahrzeugtechnik

Berufsschule, Berufsfachschule, Fachoberschule und Berufsoberschule

Berlin, Bezirk Charlottenburg-Wilmersdorf

Fachbereich Mathematik

Arbeits- und Informationsblätter zum Fach Mathematik in der Berufsoberschule 12. Klasse (Teil 1)

Lehnen

Stand 6.2010

Schuladresse:
OSZ Kfz-Technik
Gierkeplatz 1+3
10585 Berlin
Tel.: 90198 601
Fax: 90198 610
Internet: www.osz-kfz.de
EMail: info@osz-kfz.de

Lehrer im Fach Mathematik:
Jörg Lehnen
EMail: lehnen@osz-kfz.de
www.joerg-lehnen.de

Literaturempfehlungen (Stand 6.2010)

Mathematik zur Fachhochschulreife
Technische Richtung
Cornelsen Verlag Preis: ca. 22 €

Kusch Mathematik
Arithmetik und Algebra
Cornelsen Verlag Preis: ca. 20 €

Kusch Mathematik
Differentialrechnung
Cornelsen Verlag Preis: ca. 25 €

Kusch Mathematik
Integralrechnung
Cornelsen Verlag Preis: ca. 25 €

Softwareempfehlungen:

WinFunktion Mathematik
bhv Verlag Preis ca. 25 €
Hinweis: Gibt es ab und zu bei Aldi, Lidl, Plus etc. (Lernpaket Mathematik) Preis ca. 10 €

Mathehilfe im Internet:

Online Nachhilfelehrer, Abi-Vorbereitung und Lösungswege für Matheprobleme unterschiedlichster Art.

Alle Arbeits- und Infoblätter können im Internet unter
www.joerg-lehnen.de
per Download auf die Festplatte geladen werden.

Mathematik

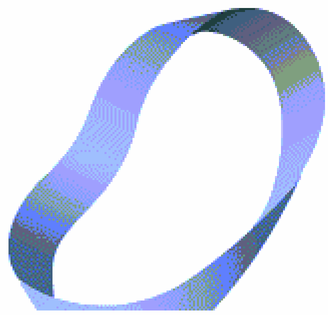
Die Lehre von den Raum- und Zahlengrößen

Begriff abgeleitet aus dem griechischen

máthema:

die Kenntnis, das Gelernte

Möbius’sches Band



Bezeichnung für eine Fläche, die entsteht, wenn man ein langes, rechtwinkliges Papierband nimmt, dessen Enden um 180 Grad gegeneinander verdreht und anschließend die Bandenden zu einer Schlinge zusammenklebt. Das Möbius’sche Band stellt eine zweidimensionale Fläche dar, die nur *eine* Seite hat. Man kann sich dies so verdeutlichen, indem man eine Linie entlang des Bandes zieht. Die Linie kommt *zweimal* zum Ausgangspunkt zurück – einmal auf der anderen Seite des Papiers und ein weiteres Mal zu ihrem Ausgangspunkt.

Wenn man das Möbius’sche Band entlang einer Linie in der Mitte zerschneidet, so entstehen nicht zwei einzelne Schlingen, sondern nur eine einzige Schlinge, deren Seite verdreht ist. Das Möbius’sche Band wurde nach dem deutschen Mathematiker August Ferdinand Möbius benannt, der um 1800 als Pionier der Topologie galt.

In der Biochemie kennt man u. a. bestimmte DNA-Stränge (*siehe* Nucleinsäuren), die praktisch ähnlich aufgebaut sind wie Möbius’sche Bänder.[1]

[1] "Möbius’sches Band", *Microsoft® Encarta® 99 Enzyklopädie*. © 1993-1998 Microsoft Corporation. Alle Rechte vorbehalten.

Themenübersicht im Fach Mathematik

Berufsoberschule BOS

Einführung:

- Zahlenmengen
- 4 Grundoperationen mit Termen in $\mathbb{R}$.
- Summen und Differenzen ein- und ausklammern
- Lineare Gleichungen
- Bruchgleichungen
- Lineare Gleichungssysteme
- Potenzen, Wurzeln, (Logarithmen)
- Proportionen

Funktionen:

- Lineare Funktionen
- Quadratische und kubische Funktionen
- (Trigonometrie)
- Ganzrationale Funktionen
- (Gebrochen-rationale Funktionen)

Differenzial- und Integralrechnung:

- Folgen und Grenzwerte
- Differentialrechnung
    - Ableitungsfunktion, Ableitungsregeln
    - Kurvendiskussion, Extremwertaufgaben
- Integralrechnung
    - Hauptsatz der Integral- und Differentzalrechnung
    - Das bestimmte Integral
    - (Bogenlängen, Rotationsvolumina)

Vektorrechnung:

- Vektor, Vektoraddition, Kollinearität, Komplanarität, Basis, Addition, S-Multiplikation, Skalarprodukt, Orthogonalität, (Kreuzprodukt)

Sondergebiete:

- (Komplexe Zahlen)
- (Chaostheorie, Fraktale)

Grundlagen

Mathematische Begriffe und Bezeichnungen

Griechisches Alphabet

Α	α	Alpha	Ν	ν	Ny
Β	β	Beta	Ξ	ξ	Xi
Γ	γ	Gamma	Ο	ο	Omikron
Δ	δ	Delta	Π	π	Pi
Ε	ε	Epsilon	Ρ	ρ	Rho
Ζ	ζ	Zeta	Σ	σ	Sigma
Η	η	Eta	Τ	τ	Tau
Θ	θ	Theta	Υ	υ	Ypsilon
Ι	ι	Jota	Φ	φ	Phi
Κ	κ	Kappa	Χ	χ	Chi
Λ	λ	Lambda	Ψ	ψ	Psi
Μ	μ	My	Ω	ω	Omega

Römische Zahlzeichen

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Mathematische Zeichen

$\in$	Element von	$\notin$	nicht Element
$\subseteq$	Teilmenge	$\subset$	echte Teilmenge
$\not\subset$	nicht Teilmenge	$\varnothing$	leere Menge
$\cap$	Durchschnitt	$\cup$	Vereinigung
$\forall$	für alle...	$\exists$	es existiert...
$\neg$	Negation	$\wedge$	Konjunktion
$\vee$	Disjunktion	$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$\Rightarrow$	Implikation	$\rightarrow$	gegen
$=$	ist gleich	$\equiv$	identisch
$\approx$	rund	$\cong$	kongruent
$\sim$	proportional	$a \mid b$	a teilt b
Σ	Summe	Π	Produkt
$\angle$	Winkel	$\perp$	senkrecht
$\uparrow\uparrow$	gleich gerichtet	$\parallel$	parallel
$n!$	Fakultät	$\lim$	Grenzwert
$f(x)$	Funktion	$f'(x)$	1.Ableitung
Δx	Differenz	dx	Differential
∂x	part.Differential	$\sqrt{\ }$	Wurzel
$\int$	Integral	$\aleph$	Aleph

Zahlenwerte einiger Konstanten

π	3.141 592 653 59
$\pi/180$	0.017 453 292 519 94
π^2	9.869 604 401 089
$\sqrt{\pi}$	1.772 453 850 906
$\sqrt{2\pi}$	2.506 628 274 631
$1/\pi$	0.318 309 886 183 8
$1/\sqrt{\pi}$	0.564 189 583 547 8
$\sqrt[3]{\pi}$	1.464 591 887 562
e	2.718 281 828 459
e^2	7.389 056 098 931
$\sqrt{e}$	1.648 721 270 7
e^{π}	23.140 692 632 78
$e^{-\pi}$	0.043 213 918 263 77
$1/e$	0.367 879 441 171 4
$\lg e$	0.434 294 481 903 3
$1/\lg e$	2.302 585 092 994
Φ	4.699 201 660 910 299 097 (Feigenbaumkonstante)
C	0.577 216 (Eulersche Konstante)

Zahlenbereiche

N	Menge der natürlichen Zahlen
Z	Menge der ganzen Zahlen
Q	Menge der nichtnegativen gebrochenen Zahlen
P	Menge der rationalen Zahlen
R	Menge der reellen Zahlen
IR	Menge der irrationalen Zahlen
C	Menge der komplexen Zahlen
I	Menge der imaginären Zahlen

Intervallschreibweise

[a,b] oder <a,b>	abgeschlossenes Intervall
(a,b) oder]a,b[	offenes Intervall
(a,b]	links offenes Intervall
[a,b)	rechts offenes Intervall

Mengen

{1;2;3}	endliche Menge
{1;3;5;...}	unendliche Menge
[1;2]	geoordnetes Paar

Informationsblatt

Thema: Zahlenbereiche- und arten

Symbol	Name	Beispiele	lösbare Gleichung	nicht lösbare Gleichung
IN	**Natürliche Zahlen**	1, 2, 3, 4, ...	x+2=3	x+3=2
□	**Ganze Zahlen**	..., -2, -1, 0, 1, 2, ...	3x=6	6x=3
□	**Rationale Zahlen**	1/2, 2/3, 1/6	6x=3	$x^2 = 2$
IR	**Reelle Zahlen**	$\sqrt{2}$, π, e	$x^2 = 2$	$x^2 = -1$
□	**Komplexe Zahlen**	2+3i [2]	$x^2 = -1$	

Mathematische Symbole:

IR:	Menge der reellen Zahlen
IR^*:	Menge der von Null verschiedenen reellen Zahlen
IR_+:	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
IR_+^*:	Menge der positiven reellen Zahlen

[2] i wird als imaginäre Zahl bezeichnet, es gilt: $i^2 = -1$

Thema: Gleichungen-Bruchgleichungen

1. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen nach x auf.

1.1 $8x - [3x + (4 - x)] = 4x + 8$

1.2 $1{,}5a + 1{,}2x = 2{,}1a + 0{,}9x$

1.3 $-(27x - 3) = -[(22x - 19) - (2 - 11x)]$

1.4 $(2x + 14)(2 - 4a) = (2x + 18)(3 - 4a)$

2. Lösen Sie die nachfolgenden Bruchgleichungen nach x auf.

2.1 $\frac{4}{5x} + \frac{1}{10} = \frac{5}{6x}$

2.2 $\frac{x}{x-3} = \frac{x+12}{x}$

2.3 $\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{18}{x^2 - 4}$

2.4 $\frac{ax + bc}{b} + \frac{dx - e}{f} = c$

3. Spezialfall:

3.1 $0 \cdot x = a$

Arbeitsblatt

Thema: Lineare Gleichungen

1. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen nach x auf.

1.1 $3x + 2x - x = 12$

1.2 $\frac{6}{x} + 5 = 41$

1.3 $\frac{1}{4}x + 2a = 3a - \frac{1}{2}x$

1.4 $0{,}6a - \frac{3}{10}x = 0{,}8a - \frac{2}{5}x$

2. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen nach u auf.

2.1 $\frac{3}{4}u = 5 - \frac{1}{2}u$

2.2 $11 = \frac{12 - u}{a}$

3. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen nach x auf.

3.1 $15x + 98 + 72a - 36b = 25x + 72a - 36b - 2$

3.2 $3x + 30 - (x + 28) = 3x - (2x + 4)$

3.3 $5 - 5x - (10 - 6x) = 5$

3.4 $19{,}3x - 5{,}4 - [15{,}6 - (5{,}2x + 20{,}1)] = 7{,}3x - (17x + 1{,}6)$

3.5 $15x - [5 - (12x + 6) + 13x] = 7x + 15$

Multiplikation von Summen und Differenzen

Erinnerung:
Bei der Multiplikation von Summen und Differenzen wird das Distributivgesetz angewandt.
Die umgekehrte Anwendung des Distributivgesetzes heißt Ausklammern.

Multipliziere aus	**Lösung**
$6(x + y)$	
$1/2 (4a - 8b)$	
$7/8 (64x^2 + 16x)$	
$(12 a - 1/4 b) \cdot 8$	
$(0,25 - 21x) \cdot 16$	
$4/9 (3/5 y + 9/11 z)$	
$(- 2/7) \cdot (14/15 g - 1/4 h)$	
$(x - 2) (y + 4)$	
$(6 + 3d) (7 + 4d)$	

Multipliziere aus und vereinfache	**Lösung**
$7(a + b) - 11a$	
$16 (0,25b - a) + 21a + b$	
$3z + 2(x + z) - 4x$	
$1/3 (6a + 9b) - 2 (a + 4 b)$	
$(- 2/7) \cdot (14x - 21y) + 3/5 (15x - 11y)$	
$3/8 a(b + 16) - b(a - 1)$	
$3z + 2(x + z) - 4x$	
$7(x - y) - 3(x + y) + 4(y - x)$	
$4(a + 2b) - 3(2a + 7b) + 2(a - b)$	
$4[3(x - y) + y] - 2x$	
$5[3a + 6(a + d) - 4d] + 11d$	
$2 + 2[2 + 2(e - f)]$	

Thema: Gleichungssysteme

1. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Einsetzungsverfahren.

$$\begin{aligned} & 3x + 2y = 5 \\ \wedge \quad & -2x + y = -8 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem mit dem Gleichsetzungsverfahren.

$$\begin{aligned} & y = 7x - 5 \\ \wedge \quad & y = 2x + 12 \end{aligned}$$

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme mit einem geeigneten Verfahren.

3.1

$$\begin{aligned} & 2x + 3y = 1 \\ \wedge \quad & 5x - 2y = 7 \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} & 9x - 12y = 5 \\ \wedge \quad & -3x + 4y = 2 \end{aligned}$$

3.3

$$\begin{aligned} & 5x - \frac{y}{2} = 3 \\ \wedge \quad & 10x - y = 7 \end{aligned}$$

Ausklammern und Ausmultiplizieren

Ausgangsterm	**ergibt ausmultipliziert**	**Ausgangsterm**	**ergibt ausgeklammert**
a(4b - z)		$x^2 - 3x$	
18(2/3 - 1/12 a)		$5x^2 - 10y$	
34 (x - y/17)		$16a^4 - 48a^2$	
(x - 16z) x/2		12a(x - 2) + 9b(x - 2)	
(24u - 72v) v/6		$x^3 + 11x^2$	
(a + b)(6a - 3b)		$x^4 - 5x^3 - 2x^2$	
(a + b + c)(a + b - c)		$2(x + 3)(3x + 1) - (x + 3)^2\ 3$	
$16x\ (0{,}25x^2y - 2xy^2)$		$4a^7b^5 - 8a^2b^8$	
$(x + x^2)\ (x^2 - x^3)$		$8x^2 + 16x - 280$	
$3(2x^2 - 7)(x - 4)$		$4x^2 - 4x + 1$	

Binomische Formeln

Aufgabe 1: Multipliziere mittels einer binomischen Formel aus!

a)	$(a - 3)^2$
b)	$(8 - d)(8 + d)$
c)	$(a + 2y)(a - 2y)$
d)	$(3a - 7b)(3a + 7b)$
e)	$(3a + 7b)^2$
f)	$(2 + 6b)(2 - 6b)$
g)	$(1{,}6 + 9c)^2$
h)	$(8 + 0{,}5b)^2$
i)	$(1{,}4a + 4y)^2$
j)	$(2 - 0{,}1c)^2$
k)	$(2ab + d)(2ab - d)$
l)	$(11ac + 8d)(11ac - 8d)$
m)	$(1{,}2a + 0{,}6d)^2$
n)	$(1{,}1d - 0{,}7e)^2$

Aufgabe 2: Faktorisiere mittels einer binomischen Formel!

a)	$d^2 - 22d + 121$
b)	$25 - 10a + a^2$
c)	$36d^2 - 49$
d)	$a^2 - 8ay + 16y^2$
e)	$16d^2 - 8de + e^2$
f)	$49a^2 - 25b^2$
g)	$49d^2 - 1{,}44g^2$
h)	$0{,}09d^2 - 36g^2$
i)	$0{,}25 - 4b^2$
j)	$2{,}56a^2 + 6{,}4ad + 4d^2$
k)	$0{,}49d^2 + 0{,}42dg + 0{,}09g^2$
l)	$4{,}84d^2 - 0{,}04$
m)	$d^2 + 12def + 36e^2f^2$
n)	$0{,}36a^2 - 0{,}64c^2$

Lösung zu Aufgabe 1

a)	$a^2 - 6a + 9$
b)	$64 - d^2$
c)	$a^2 - 4y^2$
d)	$9a^2 - 49b^2$
e)	$9a^2 + 42ab + 49b^2$
f)	$4 - 36b^2$
g)	$2{,}56 + 28{,}8c + 81c^2$
h)	$64 + 8b + 0{,}25b^2$
i)	$1{,}96a^2 + 11{,}2ay + 16y^2$
j)	$4 - 0{,}4c + 0{,}01c^2$
k)	$4a^2b^2 - d^2$
l)	$121a^2c^2 - 64d^2$
m)	$1{,}44a^2 + 1{,}44ad + 0{,}36d^2$
n)	$1{,}21d^2 - 1{,}54de + 0{,}49e^2$

Lösung zu Aufgabe 2

a)	$(d - 11)^2$
b)	$(5 - a)^2$
c)	$(6d - 7)(6d + 7)$
d)	$(a - 4y)^2$
e)	$(4d - e)^2$
f)	$(7a + 5b)(7a - 5b)$
g)	$(7d + 1{,}2g)(7d - 1{,}2g)$
h)	$(0{,}3d + 6g)(0{,}3d - 6g)$
i)	$(0{,}5 - 2b)(0{,}5 + 2b)$
j)	$(1{,}6a + 2d)^2$
k)	$(0{,}7d + 0{,}3g)^2$
l)	$(2{,}2d - 0{,}2)(2{,}2d + 0{,}2)$
m)	$(d + 6ef)^2$
n)	$(0{,}6a - 0{,}8c)(0{,}6a + 0{,}8c)$

Potenzen/Wurzeln

Arbeitsblatt

Thema: Potenzen

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln für beliebige $n, m \in \mathrm{IR}$ (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind).

$$x^n \cdot x^m = x^{n+m} \qquad (1)$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m} \qquad (2)$$

$$(x^n)^m = x^{n \cdot m} \qquad (3)$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad (4)$$

Übungsaufgaben;

1. $\frac{a^3}{a^3}$
2. $\frac{a^{n+1} \cdot c^x}{a^n \cdot c^{x-1}}$
3. $\left(\frac{3a^2}{2x^3}\right)^3$
4. $(a^3)^3$
5. $a^{(3^3)}$
6. $\left[(2a^3x^4)^2\right]^3$
7. $4a^3x^7 \cdot 5a^4x^2$
8. $(3ab)^3$
9. 0^0

Regeln für das Rechnen mit Potenzen

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Regeln für beliebige $n, m \in \mathrm{IR}$ (falls die entsprechenden Ausdrücke definiert sind).

1. **Definition**:

$$a^m = b$$

a^m = Potenz; a = Basis; m = Potenzexponent; b = Potenzwert

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ a m-mal als Faktor gesetzt.

Unterscheide: $a + a + a + \ldots + a = m \cdot a$ a m-mal als Summand gesetzt.

2. Potenzexponent $m = 0$: $a^0 = 1$ $\left(\frac{a}{a}\right) = a^{1-1} = a^0 = 1$ für $a \neq 0$

3. Potenzexponent negativ:

$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \qquad \text{für } a \neq 0$$

4. negative Potenzbasis, positiver Potenzexponent:

4.1. gerader Potenzexponent: $(-a)^{2m} = +a^{2m} = a^{2m}$

4.2 ungerader Potenzexponent: $(-a)^{2m\pm1} = -a^{2m\pm1}$

5. **Potenzregeln**:

	gleichbasige Potenzen	gleichnamige Potenzen	gleiche Potenzen
Addition	$a^m + a^n = \ldots$ nicht zu addieren	$a^m + b^m = \ldots$ nicht zu addieren	$a^m + a^m = 2a^m$
Subtraktion	$a^m - a^n = \ldots$ nicht zu subtrahieren	$a^m - b^m = \ldots$ nicht zu subtrahieren	$a^m - a^m = 0$
Multiplikation	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$a^m \cdot a^m = a^{2m}$
Division	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$	$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$
Potenzierung	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$		

6. Anwendung der Potenzformeln:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b) \cdot x + ab$$

Regeln für das Rechnen mit Wurzeln

Für das Rechnen mit Wurzeln gelten folgende Regeln:

1. **Definition**:

$$\sqrt[n]{a} = x$$

a = Radikant, Basis; n = Wurzelexponent; x = Wurzelwert

2. $\sqrt[n]{a}$ ist die **nichtnegative** Lösung der Gleichung $x^n = a$.

3. **Rechenregeln**:

	allgemein	Beispiel
Potenzieren	$\sqrt[n]{a^x} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^x \quad n, x \in IN$	$\sqrt{4^3} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 8$
Radizieren	$\sqrt[n]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[n\cdot x]{a}$	$\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt[2\cdot 2]{16} = 2$
Multiplizieren	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$
Dividieren	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\frac{36}{9}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$

insbesondere gilt:

$$\boxed{\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}} \quad ; \quad a > 0}$$

Zusammenfassung I: Gleichungen und Potenzen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der nachfolgenden Gleichungen.

   a. $(x+3)+\dfrac{4-2x}{2-x}=0$

   b. $\sqrt{13-4x}+x=2$

---

2. Vereinfachen Sie die nachstehenden Potenzausdrucke so weit wie möglich.

   a. $\dfrac{u^2v}{u^{n+3}v^2}$

   b. $\dfrac{p^{4k}}{(-p)^3}$

   c. $\dfrac{(u^2v)^{2k}}{(-u)^{2k}v^{2k}}$

   d. $\dfrac{(u^{-3}v)^2}{u^4v^{-5}}$

---

3. Bestimmen Sie die Lösungen der nachfolgenden Gleichungen.

   a. 3 (2x+3) – 4 (3-x) + 5 (x-1)+3 (4-x) = 16

   b. 5 (3x-6)+(8-5x) 3 = 4 (6x+1) -14-(5-3x)4

   c. 6x+35 = 5 [3x-4 (7x-5)+(8x-6) 3]

---

4. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

   a. $\dfrac{3}{4x}-2=\dfrac{1}{5x}$

   b. $\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{5}{x-2}$

   c. $\dfrac{2x^2-3}{(x+2)(x-5)}=2$

5. Multiplizieren Sie folgende Potenzterme.

   a. $\frac{1}{3}a^3b^4c^2 \cdot \frac{3}{4}a^3b^5c^6$

   b. $(n+a)^{2x+3y} \cdot (n+a)^{4x-2y}$

6. Potenzieren Sie folgende Terme:

   a. $(n^4b^3)^2$

   b. $\left(\frac{3}{7}a^3b^6\right)^0$

   c. $\left(\frac{a^0 \cdot b^2}{c^0}\right)^{2x}$

7. Vereinfachen Sie die nachfolgenden Terme.

   a. $3x^2 \cdot 0{,}3x^2$

   b. $3{,}5ab^2 \cdot (1{,}7a^2b - 1{,}9a^3b^5 + 1{,}2b^5)$

   c. $\left(\frac{20a}{12x}\right)^3 \cdot \left(\frac{12x}{4x}\right)^4$

Zusammenfassung II: Gleichungen und Potenzen

1. Multipliziere und fasse zusammen.

   1.1. $4(2a-2b)+(5b-2a)$

   1.2. $u(3u-2v)-2v(1{,}5u-5{,}5v)+2uv$

   1.3. $2x^2-4x(x+2y)+3y^2+2y(2x-y)+3xy$

2. Löse die Klammern mit Hilfe der binomischen Formeln auf und bestimme x.

   2.1. $(x+1)^2+x=(x+2)^2-6$

   2.2. $(8-3x)^2-(3x+2)^2+6(2x+5)+5x=2(5x+3)+2(x+3)-15x-2$

3. Multiplizieren Sie folgende Potenzterme.

   3.1. $7m^{2a-b}\cdot 6m^{3a+2b}$

   3.2. $3(a-x)^{4m-n}\cdot 2(a-x)^{m+n}$

4. Potenzieren Sie folgende Terme:

   4.1. $\left(\frac{u^3}{v^4}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2v^2}{u^4}\right)^{-1}$

   4.2. $(m^{x+y})^{x-y}$

5. Lösen Sie die nachfolgenden Gleichungen nach x auf.

   5.1. $3(9-2x)=5(2x-9)$

   5.2. $7(4x-3)+3(7-8x)=1$

   5.3. $4-\frac{7-3x}{5}=3-\frac{3-7x}{10}+\frac{x+1}{2}$

   5.4. $x+2=2(x-2)-x+6 \quad ;x\in \mathrm{IR}$

Lineare Funktionen

Hinweise zur exakten mathematischen Begriffsbildung:

Funktionen/Funktionswert/Funktionsterm

Hiermit möchte ich anmerken, dass sich in den Naturwissenschaften und der Technik gewisse Sprechweisen eingebürgert haben, die von den exakten mathematischen Begriffsbildungen abweichen. Schreibt man beispielsweise $s(t_0)$ so ist in der Mathematik der Funktionswert der Funktion s oder der Funktionswert der Funktion s an der Stelle t_0 gemeint, was jeweils aus dem Zusammenhang deutlich wird. In den Naturwissenschaften und der Technik bezeichnet man häufig die Funktion bzw. das entsprechende Weg-Zeit-Gesetz mit dem Symbol $s(t)$.
Insbesondere an den Hochschulen (Fachhochschule, Universität) wird diese Unterscheidung kaum noch vorgenommen. Hier wird durchaus die Sinusfunktion (oder kurz der Sinus) gezeichnet und nicht der Graph der Sinusfunktion (wie es exakt heißen müsste).

<u>Zur Erinnerung:</u>

Name der Funktion: $f, g, h, \sqrt{\ }, \ln, \sin$

Die Funktion f kann somit beschrieben werden durch:

$f: \ x \mapsto 3x \, ; x \in IR$ oder durch $f(x) = 3x \, ; x \in IR$

Funktionswert: $f(x_0), g(x_0)$
Funktionsterm: $3x, \quad 12x^2 + x + 3$

Funktionsgleichung: $f(x) = 2x, g(x) = x + 1$

Funktionsgraph: Darstellung der Menge geordneter Paare $(x; y)$ als Punkte $P(x / y)$ in einem Koordinatensystem.
Punkte: z.B. Hoch- und Tiefpunkte, Wendepunkte etc. beziehen sich somit immer auf den **Funktionsgraphen**.
Stellen, Werte: beziehen sich auf die **Funktion**

Insbesondere bei schriftlichen Ausarbeitungen (Klausuren, Prüfungsarbeiten, Unterlagen für die Referendarsausbildung) ist auf die Klärung des Funktionsbegriff unter Nutzung der exakten Terminologie einzugehen.

Thema: Lineare Funktionen

1. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen, die durch ihre Funktionsgleichungen gegeben sind.

1.1 $f(x) = 2x + 1$

1.2 $g(x) = 2x - 1$

1.3 $h(x) = \frac{1}{2}x + 2$

2. Untersuchen Sie, ob der Punkt $P(-1 \mid 3)$ auf einem der Graphen aus Aufgabe 1 liegt.

3. Aufgabe:

3.1 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f* mit $f(x) = -2x + 1{,}5;\ x \in \mathrm{IR}$.

3.2 Prüfen Sie durch Rechnung, ob der Punkt $P(2{,}5 \mid -3{,}5)$ auf dem Graphen von *f* liegt.

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung für eine Gerade, die zur Geraden in Aufgabe 3.1 parallel verläuft und durch den Punkt $Q(1 \mid 3{,}5)$ geht.

Hinweis:
Diese (und andere) Aufgaben sollen Sie langsam an den Aufgabenstil der Oberstufe heranführen. Die Aufgaben sind länger und setzen sich aus Teilen mit unterschiedlichen Schwierigkeiten zusammen. In der Regel werden Sie für eine Aufgabe etwa eine halbe Stunde benötigen.

Thema: Lineare Funktionen

Lineare Funktionen haben die Funktionsgleichung:

$$f(x) = mx + b\,;\, x \in \mathrm{IR}$$

- Der Graph ist eine Gerade mit der Geradengleichung $y = mx + b$
- m: Steigung der Geraden = $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- b: Achsenabschnitt der 2. Koordinate (im allgemeinen y-Achsenabschnitt)

Bestimmung der Geradengleichungen:

I: Es sind zwei Punkte $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ bekannt.

Lösungsschritte:

1. Bestimmung der Geradensteigung $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.
2. Da nun m bekannt ist, kann durch Einsetzen der Punkte (P_1) oder (P_2) in die Geradengleichung das noch fehlende b bestimmt werden.

II: Es sind ein Punkt P(x|y) und die Steigung m bekannt.

Lösungsschritte:

1. Da die Steigung bekannt ist, müssen nur noch die x- und y-Werte des Punktes P in die Geradengleichung eingesetzt werden und nach b aufgelöst werden.

Bestimmung der Schnittpunkte von Geraden:

Liegen zwei Geraden f und g nicht parallel zueinander, so schneiden sie sich in dem Punkt S mit den Koordinaten x_S und y_S.

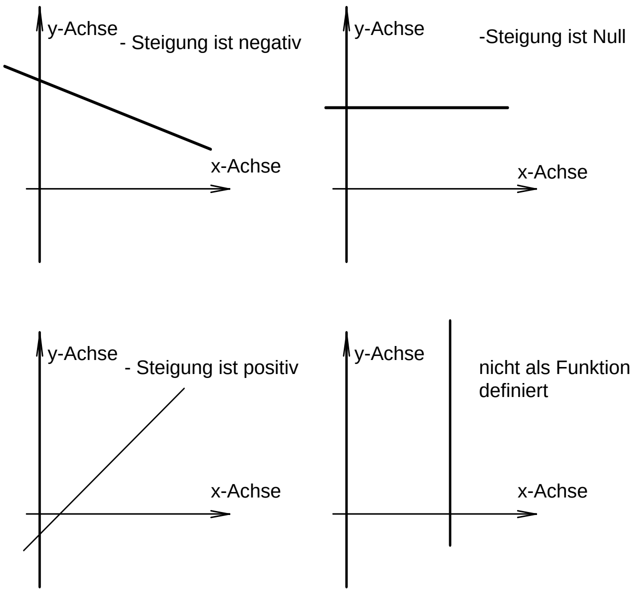
Lösungsschritte:

1. Um den gemeinsamen Punkt zu finden, werden die beiden Funktionsterme gleichgesetzt: $f(x_S) = g(x_S)$ und nach x_S aufgelöst.
2. Das Einsetzen von x_S in die Geradengleichung von f oder g liefert den zugehörigen y-Wert (y_S).

Merke:

- Die Stelle, an der die Funktion den Wert 0 hat, nennt man Nullstelle der Funktion. Die Nullstelle findet man, indem der y-Wert zu Null gesetzt wird und die Geradengleichung nach x aufgelöst wird.
- Lineare Funktionen haben im allgemeinen eine Nullstelle. Geraden, die parallel zur x-Achse verlaufen (z.B. y = 3) haben keine Nullstelle oder bestehen nur aus Nullstellen.
- Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann parallel zueinander, wenn $m_1 = m_2$ ist.
- Zwei Geraden mit den Steigungen m_1 und m_2 sind genau dann orthogonal (senkrecht) zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = -1$ ist.

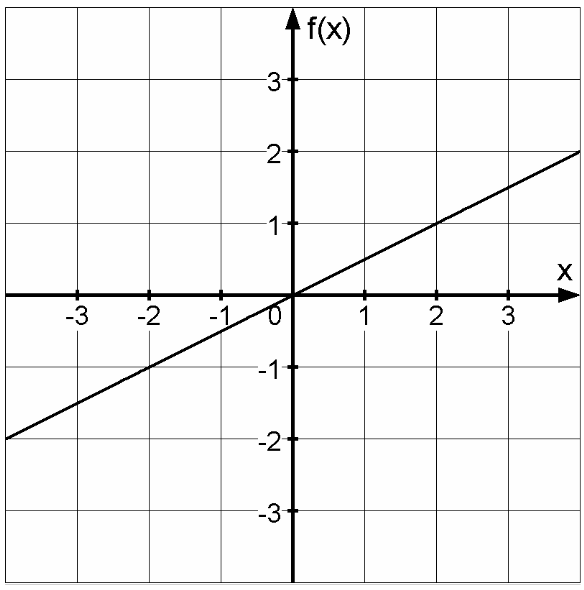
Graphen linearer Funktionen:



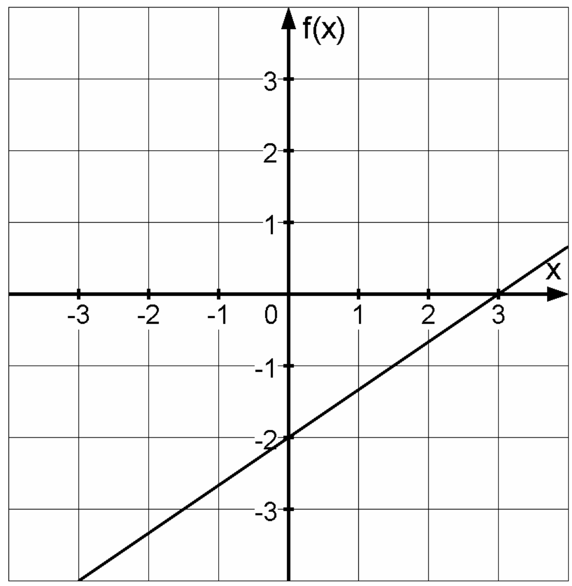
Thema: Graphen linearer Funktionen

In den Abbildungen sind jeweils die Graphen linearer Funktionen dargestellt. Bestimmen Sie die zugehörigen Funktionsgleichungen.

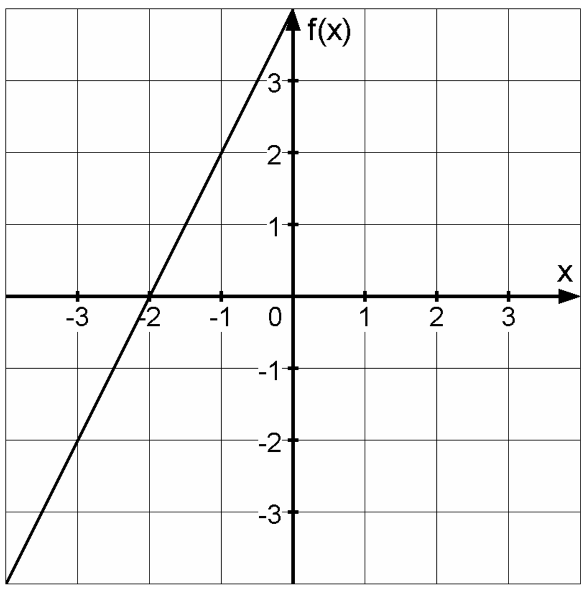
1. $f(x) =$



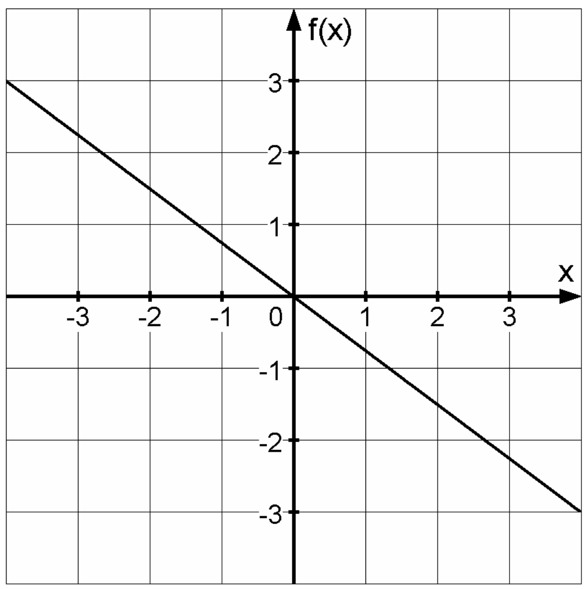
2. $f(x) =$



3. $f(x) =$



4. $f(x) =$

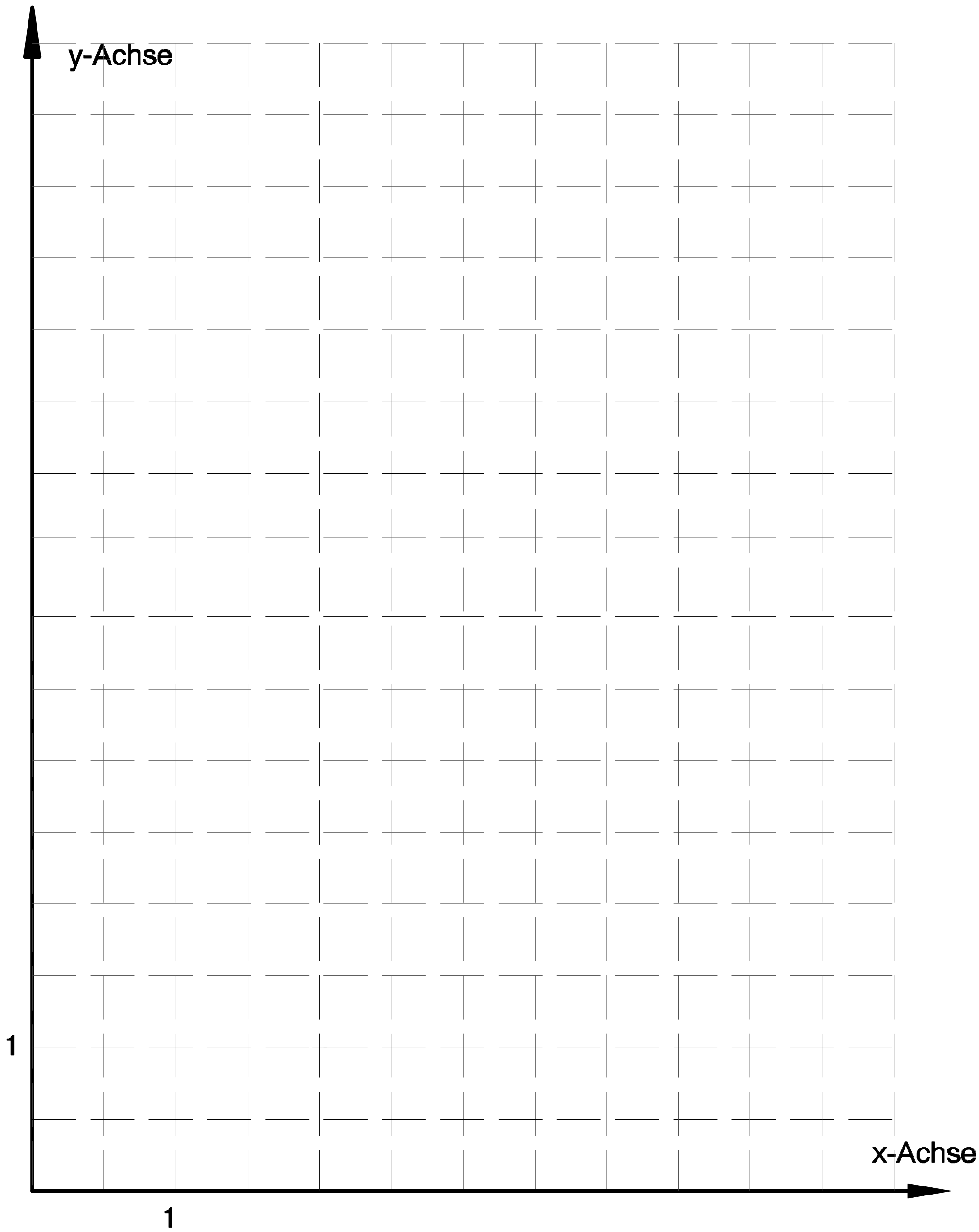


Steigung von Tangenten

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$; $x \in \mathrm{IR}$.

   1.1 Skizzieren Sie den Funktionsgraphen in das Koordinatensystem (1. Quadrant).

   1.2 Zeichnen Sie die Tangenten der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ und $x_0 = 3$ und bestimmen Sie deren Steigung.

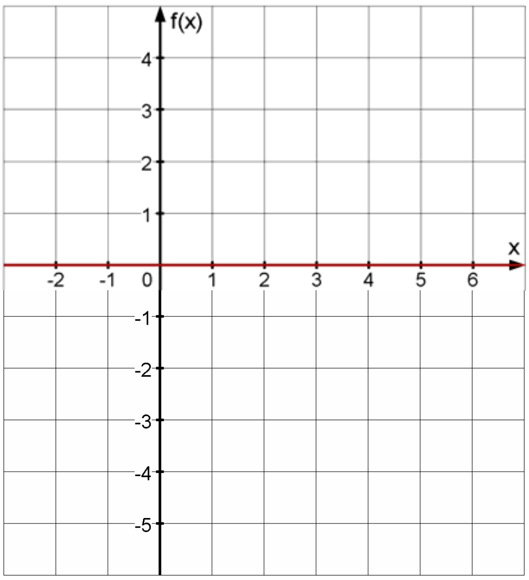


Thema: Lineare Funktionen

1. Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = -\frac{2}{3}x + 3;\ x \in \mathrm{IR}$.

1.1 Bestimmen Sie die Steigung des Graphen.
1.2 Zeichnen Sie den Graphen und an ihn ein Steigungsdreieck.
1.3 Was bedeutet der Summand 3 geometrisch.

2. Bestimmen Sie die Schnittpunkte der durch $y = 3x - 4$ festgelegten Geraden mit der *x*- und *y*-Achse.



Quadratische Funktionen

Informationsblatt im Fach Mathematik

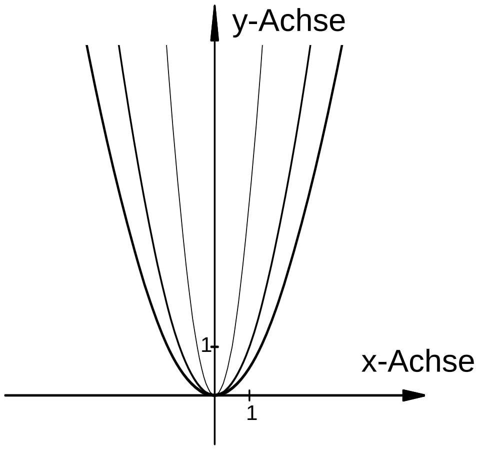
Thema: Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen haben die Zuordnungsvorschrift der Form:

$$f(x) = ax^2 + bx + c;\ (a, b, c \in \mathrm{IR}, a \neq 0)$$

- Der Graph einer solchen quadratischen Funktion heißt Parabel.
- Der Graph der Funktion *f* mit $f(x) = x^2; x \in \mathrm{IR}$ heißt Normalparabel.

Die folgende Abbildung zeigt die Normalparabel und Parabeln, die durch Verändern von a entstanden sind.



Scheitelpunkt: Der Scheitelpunkt ist der tiefste (bei nach oben offenen Parabeln) bzw. der höchste (bei nach unten offenen Parabeln) Punkt des Graphen.

Extremstelle: x-Koordinate des Scheitelpunktes.

Extremwert: y-Koordinate des Scheitelpunktes.

Hochpunkt: Ist der Scheitelpunkt die höchste Stelle des Graphen, so wird dieser Punkt als Hochpunkt bezeichnet.

Tiefpunkt: Ist der Scheitelpunkt die tiefste Stelle des Graphen, so wird dieser Punkt als Tiefpunkt bezeichnet.

Merke: Der Graph einer beliebigen quadratischen Funktion kann durch Verschieben und Strecken der Normalparabel erzeugt werden.

Scheitelpunktsform der Gleichung einer quadratischen Funktion

Um die Verschiebungen und Streckungen zu bestimmen, die erforderlich sind, um den Graph des Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$ aus der Normalparabel zu erzeugen, muss die Gleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform überführt werden.

Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 4x - 2$

1. Schritt: Der Streckfaktor 2 vor dem x^2 wird ausgeklammert.

$$f(x) = 2(x^2 - 2x - 1)$$

2.Schritt: Quadratische Ergänzung. Der Faktor vor dem x (2) wird halbiert ($\frac{2}{2}$), quadriert (1^2) und zu dem Term in der Klammer addiert und subtrahiert.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2 - 1) \\ &= 2(\underline{x^2 - 2x + 1^2} - 2) \end{aligned}$$

3.Schritt: Anwendung der Binomischen Formel auf den unterstrichenen Term.

$$f(x) = 2(x-1)^2 - 4$$

allgemein:

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$$

a: Streckung um a (im Beispiel a=2)
x_S: x-Verschiebung (im Beispiel x_S=1)
y_S: y-Verschiebung (im Beispiel y_S=-4)

Bestimmung der Nullstellen quadratischer Funktionen

- Quadratische Funktionen haben höchstens 2 Nullstellen
- Steht die Funktionsgleichung in Form eines Produktes von linearen Faktoren da (z.B. $f(x) = (x+2)(x-3)$), so ist das Produkt nur dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist (x_1 = -2 und x_2 = 3).
- Steht die Funktionsgleichung in der Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ da, so können die Nullstellen mit der sogenannten p-q-Formel bestimmt werden.

p-q-Formel

$$x^2 + px + q = 0$$

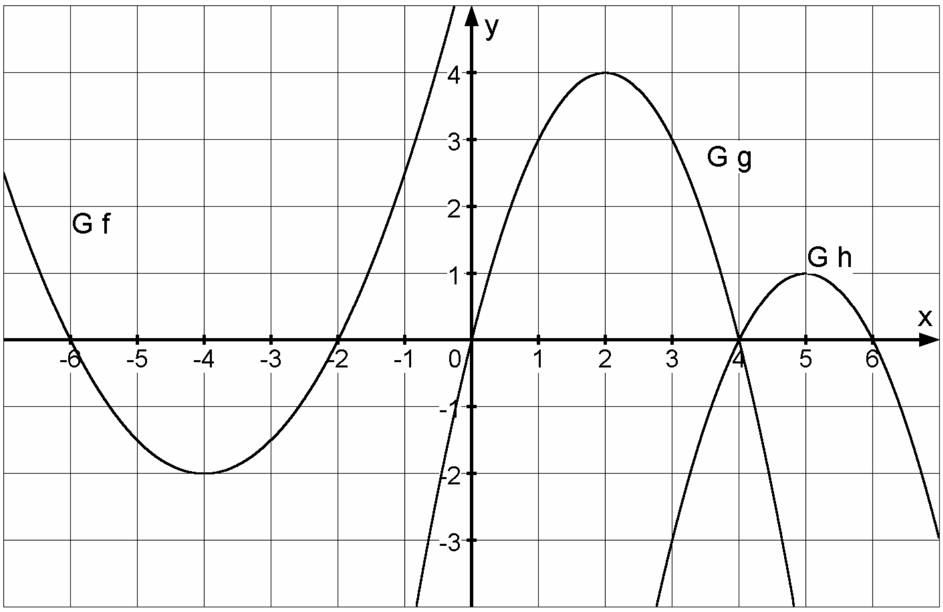
$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ausdruck unter der Wurzel ist größer als Null:	zwei Nullstellen
Ausdruck unter der Wurzel ist gleich Null:	eine Nullstelle
Ausdruck unter der Wurzel ist kleiner als Null:	keine Nullstelle

Arbeitsblatt

Quadratische Funktionen

1. Bestimmen Sie die jeweilige Funktionsgleichung der Funktionen f, g und h, deren Graphen (Parabeln) durch Verschiebungen und Streckung aus der Normalparabel hervorgegangen sind.



Scheitelpunktsform der Gleichung einer quadratischen Funktion:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S}$$

a: Streckfaktor
x_S: x-Koordinate des Scheitelpunktes
y_S: y-Koordinate des Scheitelpunktes

Arbeitsblatt

Thema: Nullstellen von quadratischen Funktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f, die gegeben ist mit:

1.1 $f(x) = (x-4)^2$

1.2 $f(x) = x^2 - 25x + 8$

1.3 $f(x) = x^2 - 3x - 10$

1.4 $f(x) = ax^2 + bx + c$

1.5 $f(x) = x^2 + 0{,}5x + 0{,}5$

2. Wie wirkt sich eine „doppelte Nullstelle“ auf den Graphen einer Funktion aus?

3. Wieviele Nullstellen kann eine quadratische Funktion haben? Begründen Sie Ihre Aussage.

Rückblick: Nullstellen von Funktionen

Wenn $f(x) = 0$ ist, nennt man die Stelle *x Nullstelle*. Für lineare und quadratische Funktionen können Sie die Nullstellen leicht berechnen. Für Funktionen 3. und 4. Grades gibt es zwar Verfahren zur formelmäßigen Berechnung von Nullstellen, für die Praxis sind sie aber zu kompliziert, und für die ganzrationalen Funktionen höheren als 4. Grades gibt es ohnehin keine solchen Verfahren.

Da ein Produkt genau dann den Wert 0 hat, wenn ein Faktor diesen Wert hat, können wir bei Kenntnis einer Nullstelle eine Funktion geringeren Grades auf weitere Nullstellen untersuchen. Wir sehen daraus, daß eine ganzrationale Funktion vom Grade *n* höchsten *n* Nullstellen haben kann. Übrigens hat eine ganzrationale Funktion *ungeraden* Grades *mindestens* eine Nullstelle.

Neben der Polynomdivision zeigen die folgenden Beispiele, daß oft durch „Ausklammern" oder Anwenden der „binomischen Formeln" die Nullstellen bestimmt werden können.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x^3 - 63x \\ &= 7 \cdot x \cdot (x^2 - 9) \\ &= 7 \cdot (x - 0) \cdot (x - 3) \cdot (x + 3) \end{aligned}$$

f hat also $-3, 0$ und 3 als Nullstellen.

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 - 16 \\ &= (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) \\ &= (x + 2) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 4) \end{aligned}$$

g hat also -2 und 2 als Nullstellen; denn der letzte Faktor ist immer größer oder gleich 4. Er wird auch als irreduzibler Faktor bezeichnet.

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3 - x^2 \\ &= x^2 \cdot (x - 1) \\ &= (x - 0)^2 \cdot (x - 1) \\ &= (x - 0) \cdot (x - 0) \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

h hat also 0 und 1 als Nullstellen; 0 heißt hier *doppelte* Nullstelle.

Steht die Funktionsgleichung in der Normalform $f(x) = x^2 + px + q$ da, so können die Nullstellen mit der sogenannten „p-q-Formel" bestimmt werden.

„p-q-Formel"

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Ausdruck unter der Wurzel ist größer als Null:	Die Funktion hat zwei Nullstellen.
Ausdruck unter der Wurzel ist gleich Null:	Die Funktion hat eine Nullstelle.
Ausdruck unter der Wurzel ist kleiner als Null:	Die Funktion hat keine Nullstelle.

Quadratische Funktionen / Parabeln

Scheitelpunktsform der Gleichung einer quadratischen Funktion:

$$\boxed{f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S}$$

1. Erklären Sie die folgenden Begriffe:

   1.1. Scheitelpunkt:

   1.2. Hochpunkt:

   1.3. Tiefpunkt:

   1.4. Extremstelle:

   1.5. Extremwert:

   1.6. Maximum:

   1.7. Minimum:

2. Gegeben ist die quadratische Funktion *f* mit $f(x) = -2x^2 - 4x - 6;\ x \in \mathrm{IR}$.

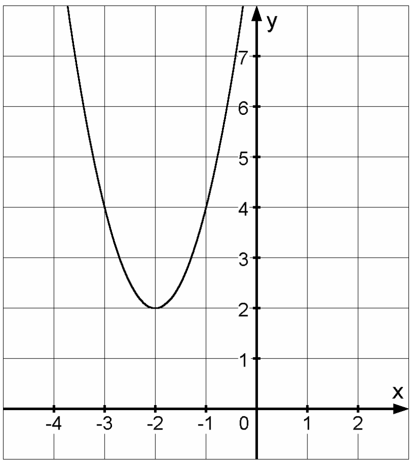
   2.1. Überführen Sie die Gleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform.

   2.2. Bestimmen Sie den Scheitelpunkt des Graphen von *f*.

   2.3. Bestimmen Sie die Extremstelle und den Extremwert von *f* und entscheiden Sie ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt.

   2.4. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion *f*.

3. In der Abbildung ist der Graph einer quadratischen Funktion dargestellt. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung.



Folgen und Grenzwerte

Thema: Folgen

Ist durch irgendeine Vorschrift (Bildungsgesetz) jeder natürlichen Zahl n (**Indexzahl**) eine rationale Zahl a_n (**Folgenglied**) zugeordnet, so bezeichnet man die Aneinanderreihung dieser rationalen Zahlen

$$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n; \ldots$$

als unendliche Zahlenfolge (genauer: unendliche Folge rationaler Zahlen).

Beispiele:

1.	$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$	$a_n = \frac{1}{n}$
2.	1;2;3;4;...	$a_n = n$
3.	$-1; 1; -1; 1; \ldots$	$a_n = (-1)^n$
4.	7;7;7;7;...	$a_n = 7$

Begriffe: Eine unendliche Zahlenfolge (a_n) heißt

- **monoton wachsend** oder **monoton steigend**, wenn für alle $n \in \mathrm{IN}$ stets gilt:
$$a_n \leq a_{n+1}$$
- **streng monoton wachsend** oder **streng monoton zunehmend**, wenn für alle $n \in \mathrm{IN}$ stets gilt:
$$a_n < a_{n+1}$$
- **monoton fallend** oder **monoton abnehmend**, wenn für alle $n \in \mathrm{IN}$ stets gilt:
$$a_n \geq a_{n+1}$$
- **streng monoton fallend** oder **streng monoton abnehmend**, wenn für alle $n \in \mathrm{IN}$ gilt:
$$a_n > a_{n+1}$$
- **arithmetische Folge**, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder stets dieselbe reelle Zahl *d* ergibt, d.h.:
$$a_{n+1} - a_n = d$$
- **geometrische Folge**, wenn der Quotient aufeinanderfolgender Glieder stets dieselbe reelle Zahl $q \neq 0$ ergibt, d.h.:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q; \quad a_n \neq 0$$

Häufungspunkt: Eine Zahl H heißt *Häufungspunkt* der Folge (a_n), wenn es unendlich viele Folgenglieder gibt, die *beliebig* nahe an der Zahl H liegen.

Grenzwert: Eine Zahl G heißt *Grenzwert* der Zahlenfolge (a_n), wenn G der einzige Häufungspunkt von (a_n) ist. Eine Folge mit genau einem Häufungspunkt besitzt einen Grenzwert. Eine Folge mit mehr als einem Häufungspunkt besitzt keinen Grenzwert.

- Eine Folge heißt **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert besitzt, andernfalls heißt sie **divergent**.

- Eine Folge, deren Grenzwert Null ist heißt **Nullfolge**.

Grenzwertsätze:

Sind die Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, so konvergieren auch die Folgen $(a_n + b_n), (a_n - b_n), (a_n \cdot b_n)$. Ist ferner $b_n \neq 0$ für alle n und $B \neq 0$, so konvergiert auch die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ und hat den Grenzwert $\frac{A}{B}$.

Unter diesen Voraussetzungen gelten die folgenden Beziehungen:

Summenfolge

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = A + B$$

Differenzfolge

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = A - B$$

Produktfolge

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = A \cdot B$$

Quotientenfolge

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{A}{B}$$

Die Grenzwertrelationen können in ihrer Gültigkeit natürlich auf den Fall beliebig, aber endlich vieler Summanden bzw. Faktoren ausgedehnt werden.

Ist $a_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, wobei P und Q Polynome sind, so ersieht man das Konvergenzverhalten nach dem Kürzen durch die höchste Potenz von n, die im <u>Nenner</u> steht.

Mit Hilfe dieses Satzes und der Grenzwertsätze findet man z.B. in folgenden Fällen leicht die Grenzwerte:

1.

$$a_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 1
\end{aligned}$$

2.

$$a_n = \frac{n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 7n - 2},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 4n + 5}{3n^2 + 7n - 2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{7}{n} - \frac{2}{n^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}$$

Literatur:

SCHULZE: *Höhere Mathematik*, Vorlesung TU Berlin, 1986.

FELDMANN, D., KRUSE, A.: *Repetitorium der Ingenieur-Mathematik*, Fachhochschule Hannover.

ATHEN, H.,GRIESEL, H., POSTEL, H.: *Mathematik heute 11*, Schroedel, Schöningh

Arbeitsblatt

Thema: Folgen

Eine Schnecke will einen 50 cm hohen Zaun überwinden. Am ersten Tag kriecht sie 20 cm am Zaun empor, am zweiten Tag schafft sie nur noch 10 cm, am dritten nur noch 5 cm usw.. Nach wieviel Tagen erreicht die Schnecke den obersten Punkt des Zaunes?

n: fortlaufende Nummerierung der Tage
a_n: zurückgelegte Tagesstrecke am Tag n

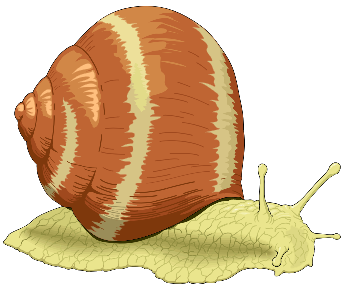
1. Vervollständigen Sie die Wertetabelle:

n	Tagesstrecke
1	20 cm
2	10 cm
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

2. Stellen Sie ein Bildungsgesetz a_n für die Folge (a_n) auf.

$a_n =$

3. Addieren Sie die Tagesstrecken für die ersten 5 und die ersten 10 Tage. Was fällt Ihnen hierbei auf?



Arbeitsblatt

Thema: Folgen

Eine fürchterliche Science-fiction-story: In einem biologischen Labor an der Freien Universität Berlin wird durch den Fehler einer unaufmerksamen Biologie-Studentin ein 1 mm langer, normalerweise harmloser Wurm so umprogrammiert, dass er seine Länge alle 20 Minuten verdoppelt.

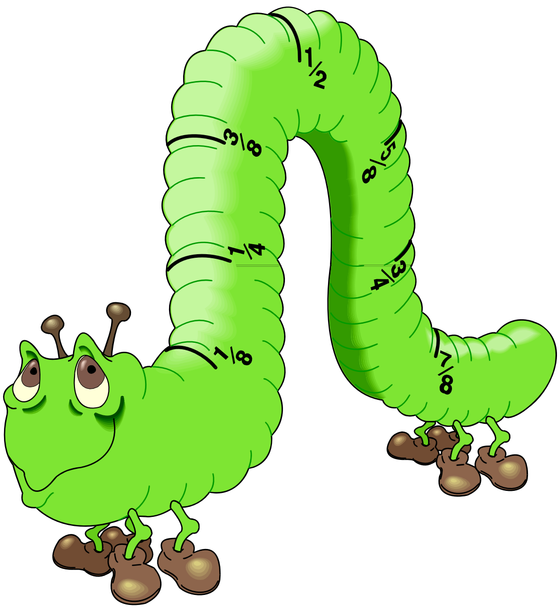
1. Erstellen Sie eine Wertetabelle für das Wurmwachstum.

2. Wie lang ist der Wurm nach 1, 2, 3 Stunden?

3. Durch welche Folge (a_n) wird dieses Wachstum beschrieben?

4. Der aggressive Wurm wächst genau in Richtung OSZ Kfz-Technik. Wann hat er die Schule mit seinem Vorderteil erreicht? (Luftlinie 8 km)

Viel Spaß!



Arbeitsblatt

Thema: Folgen

1. Untersuchen Sie jeweils die Folge (a_n) auf Monotonieeigenschaft.

   a. $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$

   b. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   c. $a_n = \frac{1}{2n+1}$

2. Stellen Sie das Bildungsgesetz a_n für die jeweils nachstehende Folge auf.

   a. 4;5;6;7;...

   b. 1;1/2;1/3;1/4;...

   c. 1;-2;4;-8;16;...

   d. $\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};\ldots$

3. Gibt es eine konstante Folge, die eine Nullfolge ist?

4. Weisen Sie nach, daß die nachstehende Folge (a_n) konvergent ist.

   a. $a_n = \frac{1}{n}$

   b. $a_n = \frac{2n}{n+1}$

   c. $a_n = 1 - 0.1^n$

Bitte umblättern!

5. Bestimmen Sie unter Verwendung der Grenzwertsätze den Grenzwert der Folge (a_n) mit:

   a. $a_n = \dfrac{2n}{n + 1328}$

   b. $a_n = \dfrac{2n + 725}{n^2 - 3873}$

   c. $a_n = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   d. $a_n = 1 - \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$

   e. $a_n = \dfrac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 - 2n + 7}$

6. Für die, die bis jetzt noch nicht genug haben. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit.

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{4n + 1}$$

Arbeitsblatt

Thema: Grenzwerte

1. Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen f mit:

1.1. $f(n) = \dfrac{12n+10}{3n+3}$

1.2. $f(n) = \dfrac{4n^2+44n+4}{n^3+4}$

1.3. $f(n) = \dfrac{11n^2+2n}{n+4}$

2. Gegeben sind die Folgen (a_n), (b_n) und (c_n) mit den Bildungsgesetzen:

2.1. $a_n = \dfrac{4n^2-1}{3n^2+n}$

2.2. $b_n = 1 + \left(\dfrac{1}{100}\right)^n$

2.3. $c_n = \left(\dfrac{2n+2}{2n}\right) \cdot \left(10 - \dfrac{1}{n}\right)$

Überprüfen Sie die Folgen auf Divergenz bzw. Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

3. Bestimmen Sie das Bildungsgesetz der nachstehenden Zahlenfolgen.

3.1. $\{0\,;2\,;0;2\,;0\,;...\}$

3.2. $\{6\,;3\,;2;\,3/2\,;...\}$

3.3. $\{\sqrt{1}\,;\sqrt{4}\,;\sqrt{8}\,;\sqrt{16}\,;...\}$

Grenzwertbestimmungen
(Regel von l´Hospital)

Die Rechenregeln für das Rechnen mit Grenzwerten erfassen folgende Fälle nicht, die man symbolisch wie folgt schreibt:

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0\cdot\infty \quad \infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \infty-\infty$$

Beispiele für solche Grenzwerte sind:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \quad , \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \quad \text{usw.}$$

<u>Regel von l´Hospital</u>

Sind f und g in einem Intervall um a differenzierbar, $g'(x)\neq 0$ und ist $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ von der Form $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$, dann ist $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der letzte Grenzwert existiert.

Bemerkung:

Die anderen Fälle lassen sich durch geeignete Umformungen auf diese zurückführen (siehe folgende beispiele). Das Verfahren kann für höhere Ableitungen wiederholt werden, wenn die Voraussetzungen für den vorhergehenden Ausdruck zutreffen. Das Verfahren funktioniert auch für den Fall $\lim\limits_{x\to\infty}$

Bsp.: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

Übungen zur Analysis

1. Berechnen Sie den Grenzwert der Folgen *f* mit:

1.1 $f(n) = \dfrac{10n+7}{2n+2}$

1.2 $f(n) = \dfrac{4n^2+36n+1}{7n^3+2}$

1.3 $f(n) = \dfrac{12n^2+4n}{n+2}$

2. Gegeben sind die folgenden Funktionen *f*. Bestimmen Sie jeweils die erste Ableitung.

2.1 $f(x) = 2x^3 \cdot x^4$

2.2 $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$

2.3 $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{x}$

3. Nennen Sie 3 Anwendungen der Differentialrechnung in der Technik und oder anderen Wissenschaftszweigen.

Gottfried Wilhelm Leibniz
geb. 1.7.1646 Leipzig
gest.14.11.1716 Hannover

"Denn meine Regel ist, daß in der Natur nichts unerclärlich ist, obschohn uns die Erclärung unbekand."