Mathematik

Grenzwerte

Was ist der Limes?

Limes nennt man den Grenzwert, der in der Analysis im Bereich der Kurvendiskussion und auch bei uneigentlichen Integralen berechnet oder bestimmt wird.

Wenn man von dem Grenzwert einer Funktion spricht, dann muss man unterscheiden zwischen

- dem **Grenzwert einer Funktion an einer Stelle** x0
- und dem **Grenzwert einer Funktion im Unendlichen**.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \text{(Grenzwert im Punkt x0)}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) \qquad \text{(Grenzwert im Unendlichen)}$$

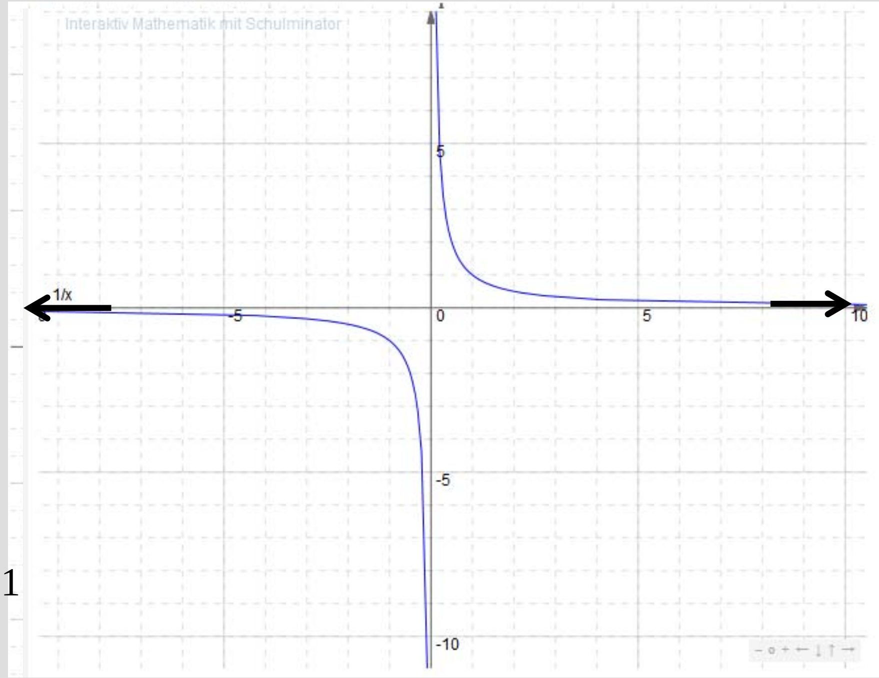
Beispiel: 1/x

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0^+}$$ Annäherung von oben

$$\frac{1}{10} = 0{,}1; \quad \frac{1}{100} = 0{,}01; \quad \frac{1}{1000} = 0{,}001; \quad \frac{1}{10000} = 0{,}0001$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \mathbf{0^-}$$ Annäherung von unten

$$\frac{1}{-10} = -0{,}1; \quad \frac{1}{-100} = -0{,}01; \quad \frac{1}{-1000} = -0{,}001; \quad \frac{1}{-10000} = -0{,}0001$$



Allgemeine Aussage zum Grenzwert

Geht bei einem Funktionsterm mit konstantem Zähler

- der **Nenner gegen null**, ist der Grenzwert **unendlich groß**.
- Geht der **Nenner gegen unendlich**, ist der Grenzwert **null**.

Beispiel: 1/x

$$ID = IR \setminus \{0\}$$

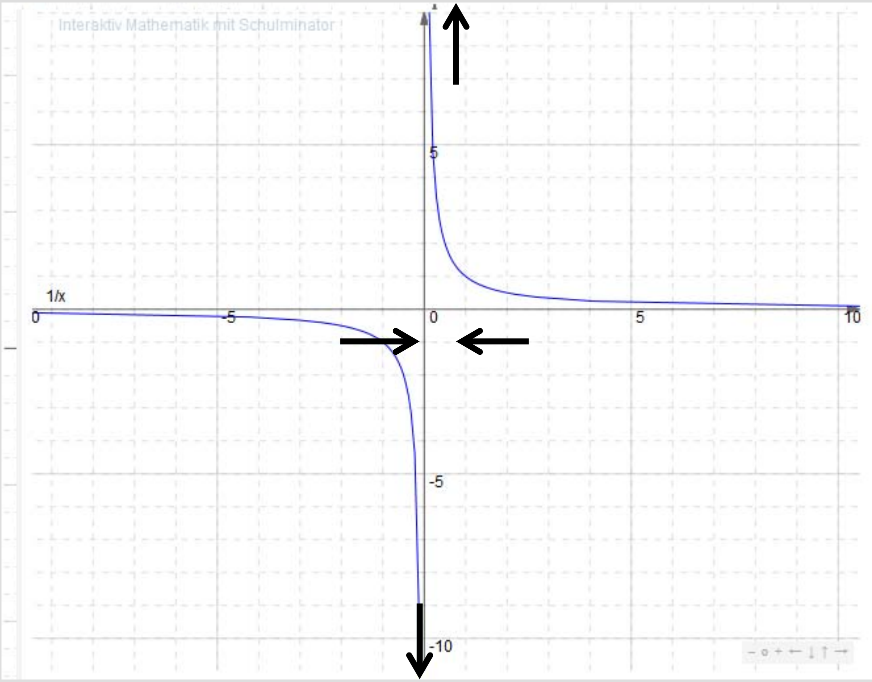
Definitionslücke → Polstelle

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$$ →+∞ Annäherung von rechts

$$\frac{1}{1} = 1; \quad \frac{1}{0{,}5} = 2; \quad \frac{1}{0{,}1} = 10; \quad \frac{1}{0{,}01} = 100$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x}$$ →-∞ Annäherung von links

$$\frac{1}{-1} = -1; \quad \frac{1}{-0{,}5} = -2; \quad \frac{1}{-0{,}1} = -10; \quad \frac{1}{-0{,}01} = -100$$



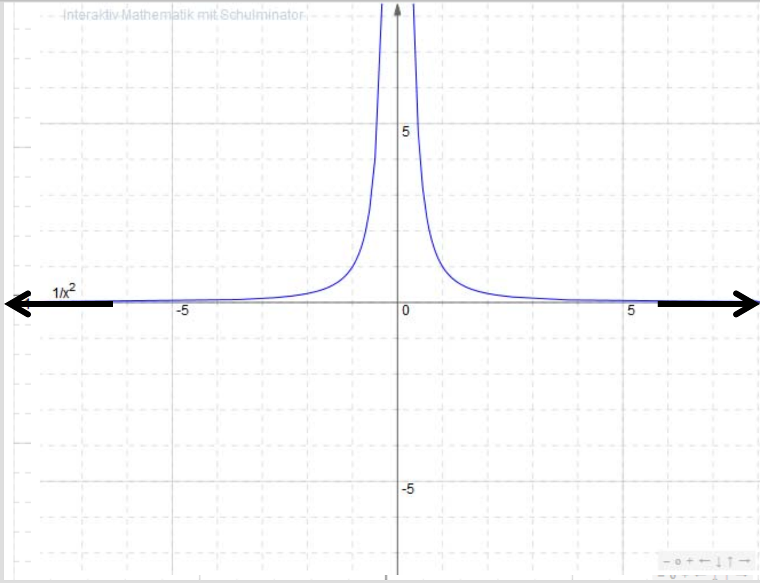
Beispiel: $1/x^2$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\mathbf{0^+}$$ Annäherung von oben

$$\frac{1}{10^2}=0{,}01;\quad \frac{1}{100^2}=0{,}0001;\quad \frac{1}{1000^2}=0{,}000001$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=\mathbf{0^+}$$ Annäherung **von oben**

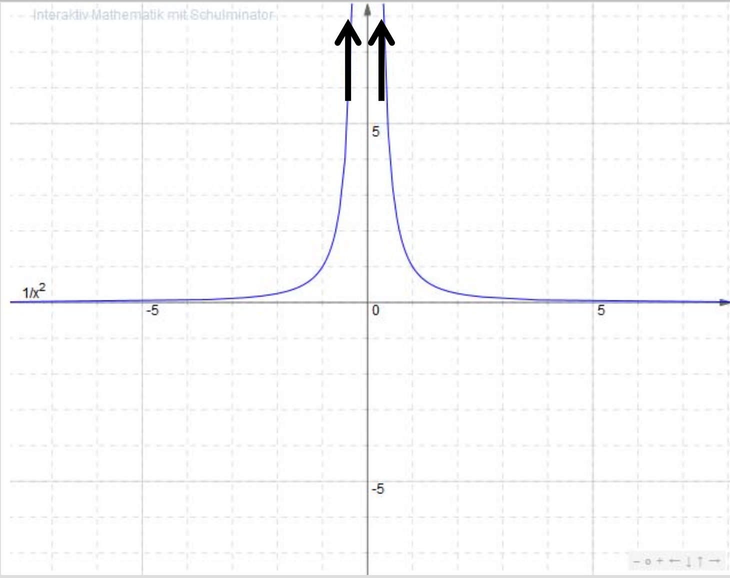
$$\frac{1}{-10^2}=0{,}01;\quad \frac{1}{-100^2}=0{,}0001;\quad \frac{1}{-1000^2}=0{,}000001$$



Beispiel: $1/x^2$

$$ID = IR \setminus \{0\}$$

Definitionslücke → Polstelle



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} \to +\infty$$ Annäherung von rechts

$$\frac{1}{1^2} = 1; \quad \frac{1}{0{,}5^2} = 4; \quad \frac{1}{0{,}1^2} = 100; \quad \frac{1}{0{,}01^2} = 10000$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} \to +\infty$$ Annäherung von links

$$\frac{1}{-1^2} = 1; \quad \frac{1}{-0{,}5^2} = 4; \quad \frac{1}{-0{,}1^2} = 100; \quad \frac{1}{-0{,}01^2} = 10000$$

Grenzwerte von Brüchen

$$f(x)=\frac{3x^2-5x}{2x^2-3}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\cancel{x^2}\left(3-\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\underbrace{3}_{3}-\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}}{\underbrace{2}_{2}-\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{0}}$$

1. Ausklammern der höchsten Potenz

2. Kürzen der höchsten Potenz

3. Grenzwerte einzeln betrachten

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{3}{2}$$

Grenzwerte von Brüchen

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x}{2x^3 - 3}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\cancel{x^2}\left(3 - \frac{5}{x}\right)}{x^{\cancel{3}}\left(2 - \frac{3}{x^3}\right)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{\overbrace{3}^{3} - \overbrace{\frac{5}{x}}^{0}}{\boxed{\underbrace{x}_{\infty}\left(\underbrace{2}_{2} - \underbrace{\frac{3}{x^3}}_{0}\right)}}$$

Dominanter Teil

1. Ausklammern der höchsten Potenz

2. Kürzen der höchsten Potenz

3. Grenzwerte einzeln betrachten

4. Prüfen wo sich der dominierende Teil befindet

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Grenzwerte von Brüchen

$$f(x)=\frac{3x^3-5x}{2x^2-3}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\cancel{x^3}\left(3-\frac{5}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)}$$

Dominanter Teil

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\frac{\boxed{\underset{\to\infty}{x}\left(\underset{\to 3}{3}-\underset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}\right)}}{\underset{\to 2}{2}-\underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}}$$

1. Ausklammern der höchsten Potenz

2. Kürzen der höchsten Potenz

3. Grenzwerte einzeln betrachten

4. Prüfen wo sich der dominierende Teil befindet

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\to\infty$$

Liebe Schülerinnen und Schüler,
vielen Dank, dass Sie so lange
aufmerksam zugehört haben.