Quadratische Gleichungen und Funktionen

Grundlagen

Bei einer quadratischen Gleichung kommt die Unbekannte Variable x mindestens einmal in der 2.Potenz vor, aber in keiner höheren Potenz.

$$\underbrace{ax^2}_{\text{quadratischer Anteil}} + \underbrace{bx}_{\text{linearer Anteil}} + \underbrace{c}_{\text{konstanter Anteil}} = 0 \qquad a \neq 0$$

a, b und c sind Koeffizienten

Beispiel:

$$7x^2 + 8x + 9 = 0$$

Sollte a = 0 sein, würde der erste Summand zu Null → lineare Gleichung

Beispiel:

$$0x^2 + 8x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 8x + 9 = 0$$

Arten der Quadratischen Gleichungen

Allgemeine Form

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

Normalform

$$\boxed{x^2 + px + q = 0}$$

Koeffizient **a** ist nicht vorhanden…also 1.

Übliche Benennung der beiden anderen Koeffizienten mit **p** und **q**.

Reinquadratische Gleichung

$$\boxed{ax^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

Lineares Glied fehlt.

Quadratische Gleichung ohne Absolutglied

$$\boxed{ax^2 + bx = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

Absolutes Glied (= konstantes Glied) fehlt.

Erscheinungsformen der Quadratischen Gleichungen

Faktorisierte Form

$$\boxed{(x+a)\cdot(x+b)=0}$$

Manchmal kann man eine quadr. Gleichung nicht gleich erkennen.
Ausmultiplizieren der Klammern:

$$\boxed{\begin{aligned}&(x+a)\cdot(x+b)=0\\&x^2+ax+bx+ab=0\\&x^2+(a+b)x+ab=0\end{aligned}}$$

Sonderfall a = b

$$\boxed{\begin{aligned}&(x+a)\cdot(x+b)=0\\&(x+a)^2=0\end{aligned}}$$

$$\boxed{(x+a)\cdot(x+b)=c}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(x+a)\cdot(x+b)=c\\&x^2+ax+bx+ab=c\\&x^2+(a+b)x+(ab-c)=0\end{aligned}}$$

Sonderfall a = b

$$\boxed{\begin{aligned}&(x+a)\cdot(x+b)=c\\&(x+a)^2=c\end{aligned}}$$

Quadratische Gleichungen

Reinquadratische Gleichung

$$\boxed{ax^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 - 80 &= 0 \quad /+80 \\ 5x^2 &= 80 \quad /5 \\ x^2 &= 16 \quad /\sqrt{} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= -4 \end{aligned}$$

auch (-4)•(-4) = 16

Wenn man aus einer Zahl x > 0 die Quadratwurzel zieht, erhält man stets 2 Lösungen

Quadratische Gleichung ohne Absolutglied

Quadratische Gleichungen **ohne Absolutglied**, also Gleichungen der Form **$ax^2 + bx = 0$** , kann man lösen, indem man **x** ausklammert. Man erhält **$x(ax + b) = 0$** .

Ein Produkt ist null, wenn mindestens einer der Faktoren gleich null ist.
Diese Gleichung hat immer zwei Lösungen, **$x_1 = 0$** und **$x_2 = -b/a$** .

Beispiel

$$x^2 + 31x = 0$$

$$\boxed{x}\boxed{(x+31)} = 0$$

$$\boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{\begin{aligned} x_2 + 31 &= 0 \\ x_2 &= -31 \end{aligned}} \qquad \left[\frac{-b}{a} \rightarrow = \frac{-31}{1} = -31\right]$$

$$L = \{(-31;0)\}$$

Quadratische Gleichung ohne Absolutglied

Beispiel

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{3}{4}x \qquad /-\frac{3}{4}x$$

$$\frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}x = 0 \qquad /\, x\, ausklammern$$

$$x\left(\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}\right) = 0 \qquad /\, Nullprodukt$$

$$\boxed{x_1 = 0}$$

$$\frac{2}{3}x_2 - \frac{3}{4} = 0 \qquad /+\frac{3}{4}$$

$$\frac{2}{3}x_2 = \frac{3}{4} \qquad /\cdot\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{8}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{9}{8}}$$

$$L = \left\{\left(\frac{9}{8};0\right)\right\}$$

Probe

$$x = \frac{9}{8}$$

$$\frac{2}{3}x^2 = \frac{3}{4}x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{9}{8}$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{9\cdot 9}{8\cdot 8} = \frac{3\cdot 9}{4\cdot 8}$$

$$\frac{162}{192} = \frac{27}{32} \qquad /\,\frac{162:6}{192:6}$$

$$\boxed{\frac{27}{32} = \frac{27}{32}}$$

Binomische Formeln

Erste binomische Formel

$(a+b)^2=a^2 \quad +2ab+b^2$ Plus-Formel

Zweite binomische Formel

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ Minus-Formel

Dritte Binomische Formel

$(a+b)*(a-b)=a^2-b^2$ Plus-Minus-Formel

Quadratische Ergänzung

Warum? → Zur Lösung Q.Gl. oder um diese in die Scheitelpunktform zu bringen!

1. Sofern die Zahl vor der quadratischen Variable keine 1 ist, dividiert durch diese.
2. Findet **p** heraus (das ist die Zahl die vor der einfachen Variable steht)
3. Bildet nun (**p** : 2)². Damit erhaltet ihr die quadratische Ergänzung
4. Schafft bei eurer Gleichung die alleinstehende Zahl ohne Variable auf die andere Seite
5. Baut die quadratische Ergänzung in die Gleichung ein
6. Bildet den Klammerausdruck

Beispiel:

$2x^2 - 8x - 4 = 0 \quad /:2$ Zahl vor quadratischer Variablen $\neq 1 \rightarrow$ Division durch diese

$x^2 - 4x - 2 = 0$

$p = -4$ p herausfinden $\rightarrow$ Zahl vor der einfachen Variablen

$\left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$ quadratische Ergänzung bilden durch $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

$x^2 - 4x - 2 = 0 \quad /+2$ die alleinstehende Zahl ohne Variable auf die andere Seite

$x^2 - 4x = 2$

$x^2 - 4x + 4 = 2 + 4$ quadratische Ergänzung in die Gleichung einbauen

$(x-2)^2 = 6$ Klammerausdruck bilden

In die Klammer schreiben wir ein x und dahinter nun p : 2, also - 4 : 2 = - 2.

Das Quadrat hinter der Klammer nicht vergessen!

Quadratische Ergänzung

1. Sofern die Zahl vor der quadratischen Variable keine 1 ist, dividiert durch diese.
2. Findet **p** heraus (das ist die Zahl die vor der einfachen Variable steht)
3. Bildet nun (**p** : 2)^2. Damit erhaltet ihr die **quadratische Ergänzung**
4. Schafft bei eurer Gleichung die alleinstehende Zahl ohne Variable auf die andere Seite
5. Baut die quadratische Ergänzung in die Gleichung ein
6. Bildet den Klammerausdruck

Beispiel 2:

$8a^2 + 4a = 16 \quad / : 8$	Zahl vor quadratischer Variablen $\neq 1 \rightarrow$ Division durch diese
$a^2 + \frac{1}{2}a = 2$	
$p = \frac{1}{2}$	p herausfinden $\rightarrow$ Zahl vor der einfachen Variablen
$\left(\frac{\frac{1}{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2 \cdot 2}\right)^2 = \frac{1^2}{4^2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$	quadratische Ergänzung bilden durch $\left(\frac{\mathrm{p}}{2}\right)^2$
$a^2 + \frac{1}{2}a = 2$	die alleinstehende Zahl ohne Variable auf die andere Seite
$a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{16} = 2 + \frac{1}{16}$	quadratische Ergänzung in die Gleichung einbauen
$\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$	Klammerausdruck bilden $\rightarrow$ x und dahinter $\frac{\mathrm{p}}{2}$

Quadratische Ergänzung

1. Faktor vor dem *x*2 aus den ersten beiden Termen ausklammern
2. Findet **p** heraus (das ist die Zahl die vor der einfachen Variable steht)
3. Bildet nun (**p** : 2)^2. Damit erhaltet ihr die **quadratische Ergänzung**
4. Quadratische Ergänzung
5. Ausmultiplizieren
6. Binomische Formel anwenden

Beispiel:

$$f(x) = 2x^2 + 12x$$

$$1.\,Ausklammern \quad \Rightarrow 2(x^2 + 6x)$$

$$2.\,Zahl\ p\ vor\ x\ herausfinden \quad \Rightarrow p = 6$$

$$3.\left(\frac{p}{2}\right)^2 berechnen \quad \Rightarrow \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = \underline{9}$$

$$4.\,Quadr.\,Ergänzung \quad \Rightarrow 2(x^2 + 6x + 9 - 9)$$

$$5.\,Ausmultiplizieren\ der\ überschüssigen\ Zahl\ aus\,[4.] \quad \Rightarrow 2(x^2 + 6x + 9) - 18$$

$$6.\,Binomische\ Formel\ anwenden\ x^2 + 2xb + b^2 = (x+b)^2 \Rightarrow 2(x+3)^2 - 18$$

Quadratische Gleichung Lösen

$2x^2 - 12x - 32 = 0$

$1.\,Ausklammern \quad \Rightarrow 2(x^2 - 6x) - 32 = 0$

$2.\,Zahl\ p\ vor\ x\ herausfinden \quad \Rightarrow p = -6$

$3.\left(\frac{p}{2}\right)^2 berechnen \quad \Rightarrow \left(\frac{-6}{2}\right)^2 = (-3)^2 = 9$

$4.\,Quadr.\,Ergänzung \quad \Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9 - 9) - 32 = 0$

$5.\,Ausmultiplizieren\ der\ überschüssigen\ Zahl\ aus\,[4.] \quad \Rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) - 18 - 32 = 0 \rightarrow 2(x^2 - 6x + 9) - 50 = 0$

$6.\,Binomische\ Formel\ anwenden\ x^2 - 2xb + b^2 = (x-b)^2 \Rightarrow 2(x-3)^2 - 50 = 0$

$7.\,Gleichung\ nach\ x\ auflösen$

$$2(x-3)^2 - 50 = 0 \qquad /+50$$

$$2(x-3)^2 = 50 \qquad /:2$$

$$(x-3)^2 = 25 \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{25}$$

$x - 3 = 5$ Da die Wurzel aus 25 sowohl +5 als auch -5 sein kann, ist eine Fallunterscheidung notwendig.

Fall 1: rechte Seite ist +5

$x - 3 = 5 \quad /+3$

$x = 8$

Fall 2: rechte Seite ist -5

$x - 3 = -5 \quad /+3$

$x = -2$

$L = \{(-2;8)\}$

p-q-Formel, Diskriminante und Lösungsmenge

Normalform der quadratischen Gleichung: $f(x)=x^2+px+q$

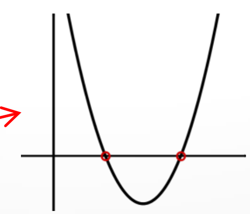
$$p-q-Formel: x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$\text{Diskriminante}: D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

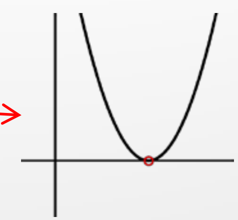
Die Diskriminante D bestimmt die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Gleichung.

$$x_1 = -\left(\frac{p}{2}\right) + \sqrt{D} \quad \vee \quad x_2 = -\left(\frac{p}{2}\right) - \sqrt{D}$$

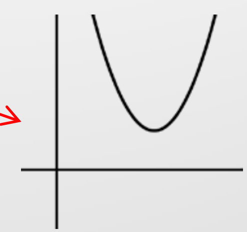
$D > 0 \rightarrow L = \{x_1;x_2\}$ zwei Lösungselemente



$D = 0 \rightarrow L = \{x\}$ ein Lösungselement



$D < 0 \rightarrow L = \{\}$ kein Lösungselement



p – q – Formel

Eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in R$ (Normalform) lässt sich mithilfe der p-q-Formel lösen. Wichtig ist hierbei, dass der Koeffizient vor dem x² - Term **1** ist.

$$\boxed{p-q-Formel: x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} \longrightarrow \boxed{p-q-Formel: x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}$$

Beispiel:

$$p-q-Formel: x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0 \quad / :3$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad / D\ bestimmen \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\frac{1^2}{2^2} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \qquad positiv, also\ \ lösbar\ \ / p-q-Formel$$

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-1}{2} - \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}}$$

Quadratische Funktion

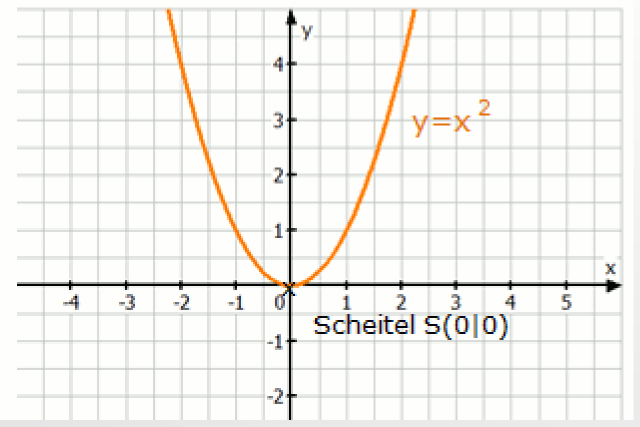
$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)}$$

Der Graph einer solchen quadratischen Funktion heißt Parabel.

Normalform einer quadratischen Funktion mit a = 1

$$\boxed{y = x^2 + px + q}$$

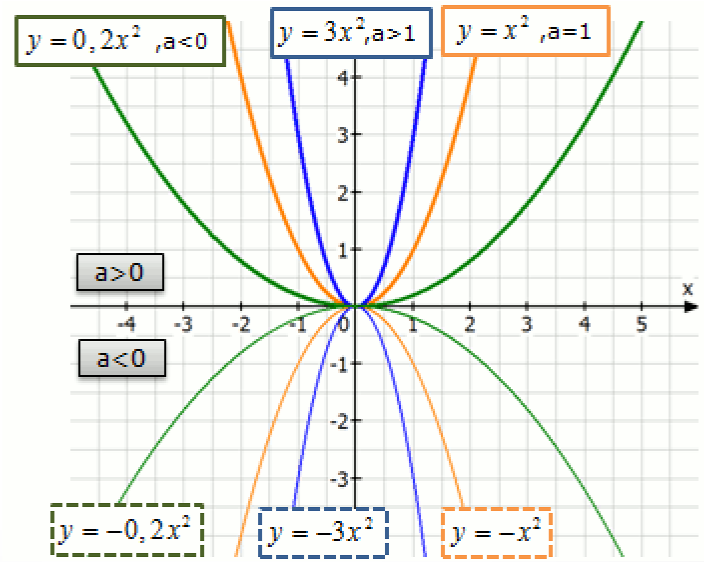
Sonderfall mit a = 1, b = 0 und c = 0 → **Normalparabel** mit **y = x²**



Quadratische Funktion

Einfluss des Faktors **a** auf Parabel **y = ax²**

- Normalparabel $a = 1$
- Streckung $|a| > 1$
- Stauchung $|a| < 1$
- Nach oben geöffnet $a > 0$
- Nach unten geöffnet $a < 0$



Scheitelpunkt: …ist der tiefste (nach oben offene Parabeln) bzw. der höchste (nach unten offene Parabeln) Punkt des Graphen.

Extremstelle: x-Koordinate des Scheitelpunktes.

Extremwert: y-Koordinate des Scheitelpunktes.

Hochpunkt: Ist der Scheitelpunkt die höchste Stelle des Graphen, so wird dieser Punkt als Hochpunkt bezeichnet.

Tiefpunkt: Ist der Scheitelpunkt die tiefste Stelle des Graphen, so wird dieser Punkt als Tiefpunkt bezeichnet.

→ Der Graph einer beliebigen quadratischen Funktion kann durch Verschieben und Strecken der Normalparabel erzeugt werden.

Parabel verschieben entlang der x-Achse

Parabelgleichung: $f(x)=(x-d)^2$

Gesucht ist die Gleichung einer Normalparabel, die um 6 Einheiten nach **rechts** verschoben ist.

$f(x)=(x-6)^2$

Auf das richtige Vorzeichen achten.
Obwohl die Parabel nach rechts (also in positiver) Richtung verschoben ist, braucht man ein negatives Vorzeichen.
Grund dafür ist, dass die Formel $\mathbf{f(x)=(x-d)^2}$ lautet. Die Lösung für unsere Aufgabe erhalten wir, wenn wir **d = 6** einsetzen.

Gesucht ist die Gleichung einer Normalparabel, die um 3 Einheiten nach **links** verschoben ist.

$f(x)=(x+3)^2$

Die Lösung für unsere Aufgabe erhalten wir, wenn wir **d = -3** einsetzen.

$$f(x)=(x-(-3))^2=(x+3)^2$$

Parabel verschieben entlang der y-Achse

Parabelgleichung: $f(x)=(x-d)^2$

Gesucht ist die Gleichung einer Normalparabel, die um 6 Einheiten nach **oben** verschoben ist.

$f(x) = x^2 + 6$

Allgemein können wir die Normalparabel nach **oben** verschieben, wenn wir eine konstante Zahl **c** addieren.

$f(x) = x^2+c$

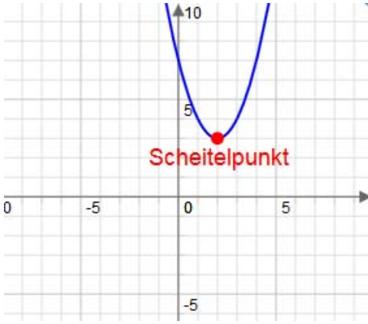
Gesucht ist die Gleichung einer Normalparabel, die um 3 Einheiten nach **unten** verschoben ist.

$f(x) = x^2 - 3$

Allgemein können wir die Normalparabel nach **oben** verschieben, wenn wir eine konstante Zahl **c** addieren.

$f(x) = x^2+c$

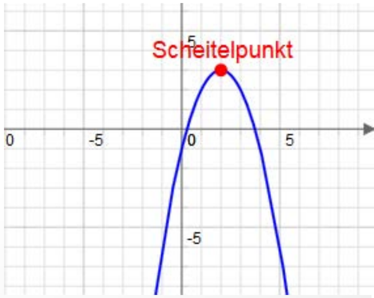
Scheitelpunktsform der Gleichung einer quadratischen Funktion



Die **Scheitelpunktform** einer quadratischen Funktion lautet

$f(x)=a(x-d)^2+e$

Die Koordinaten des Scheitelpunktes lassen sich in dieser Form leicht ablesen:
S(d|e)



Beispiel:

Gegeben ist eine quadratische Gleichung in Scheitelpunktform

$f(x)=-2(x-2)2+3$

Der Scheitelpunkt der Parabel ist demnach: S(2|3).