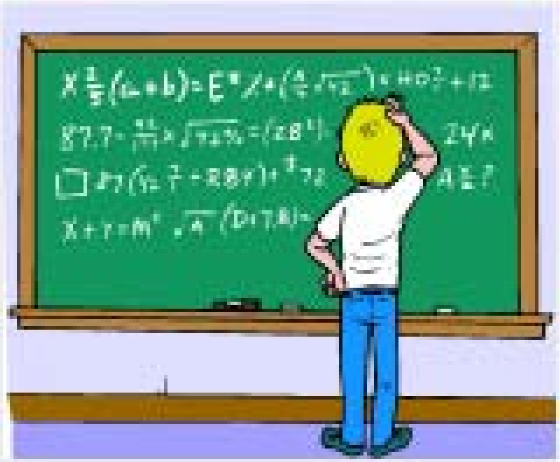
Lineare Gleichungssysteme



Grundlagen

Unter einem linearen Gleichungssystem mit *m* linearen Gleichungen und *n* Unbekannten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ versteht man die folgende Form:

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

wobei die a_{ij} (also: $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{mn}$) und $b_1, b_2, \ldots, b_m$ (vorgegebene) Zahlen sind.

Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, braucht man genauso viele Gleichungen wie unterschiedliche Variable d.h.

- Für Gleichungen mit 2 Variablen braucht man 2 Gleichungen.
- Für Gleichungen mit 3 Variablen braucht man 3 Gleichungen.

Gegenbeispiel: 1 Gleichung; 2 Variablen

$$-2x + y = 7 \quad /+2x$$

$$y = 7 + 2x$$

$$x = 2: \quad y = 7 + 2 \cdot 2 = 11 \qquad L = \{2;11\}$$

$$x = 4: \quad y = 7 + 2 \cdot 4 = 15 \qquad L = \{4;15\}$$

Additionsverfahren

Ziel aller Lösungsverfahren:

Aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen, erzeuge 1 Gleichung mit 1 Variablen.

Die 1 Variable wird dann rückwärts eingesetzt.

Die 3 (4) Lösungsverfahren:

$$\left| \begin{array}{ll} I & 2x+2y=20 \\ II & 4x-4y=8 \end{array} \right|$$

I. Additionsverfahren

$$\left| \begin{array}{ll} I & 2x+2y=20 \\ II & \underline{2x-2y=4} \end{array} \right| +$$

$$\begin{array}{ll} 4x+0 = 24 & /:4 \\ x = 6 & \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen $\longrightarrow$

$$\begin{array}{rl} 2\cdot 6+2y=20 & \\ 12+2y=20 & /-12 \\ 2y=8 & /:2 \\ y=4 & \end{array}$$

$$L=\{6;4\}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 2\cdot 6+2\cdot 4=20 \\ 12+8=20 \\ 20=20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2\cdot 6-2\cdot 4=4 \\ 12-8=4 \\ 4=4 \end{array}$$

Additionsverfahren - Beispiel

$$2x - 16 = -3y$$
$$-3y = -9x + 6$$

Keine optimale Form → Variablen und Zahlen sind auf beiden Seiten

$$\left[\begin{array}{l} 2x - 16 = -3y \quad /+3y;+16 \\ \boxed{\underline{2x + 3y = 16}} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{l} -3y = -9x + 6 \quad /+9x \\ \boxed{\underline{9x - 3y = 6}} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2x + 3y = 16 \\ 9x - 3y = 6 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x + 3y = 16 \\ 9x - 3y = 6 \quad + \\ 2x + 9x + 3y + (-3y) = 22 \\ 11x = 22 \quad /:11 \\ \boxed{x = 2} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 2x + 3y = 16 \quad \Rightarrow x = 2 \\ 2 \cdot 2 + 3y = 16 \\ 4 + 3y = 16 \quad /-4 \\ 3y = 12 \quad /:3 \\ \boxed{y = 4} \end{array}}$$

Probe:

$$\boxed{\begin{array}{r} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16 \\ 4 + 12 = 16 \\ 16 = 16 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{r} 9 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 6 \\ 18 - 12 = 6 \\ 6 = 6 \end{array}}$$

$$L = \{2;4\}$$

Additionsverfahren – Beispiel Fzg.

Beispiel Fahrzeugtechnik

Ein Fahrzeug legt eine Strecke von 15 km zurück. Dabei bewegt es sich mit zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Eine Geschwindigkeit hat es 3 Minuten lang inne und die zweite 7 Minuten lang.

Ein anderes Fahrzeug legt eine Strecke von 33 km zurück. Auch hier bewegt es sich mit zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Eine 4 Minuten lang und die zweite 5 Minuten lang.

$$3x + 7y = 15$$
$$4x + 5y = 33$$

$$3x + 7y = 15 \quad / \cdot 4$$
$$4x + 5y = 33 \quad / \cdot (-3)$$
$$\rightarrow$$
$$12x + 28y = 60 \quad +$$
$$-12x + 15y = 99$$
$$13y = -39 \quad / :13$$
$$\boxed{y = -3}$$

$$3x + 7y = 15 \Rightarrow y = -3$$
$$3x + 7 \cdot (-3) = 15$$
$$3x - 21 = 15 \quad / + 21$$
$$3x = 36 \quad / :3$$
$$\boxed{x = 12}$$

Probe:

$$3 \cdot 12 + 7 \cdot (-3) = 15$$
$$36 - 21 = 15$$
$$15 = 15$$

$$4 \cdot 12 + 5 \cdot (-3) = 33$$
$$48 - 15 = 33$$
$$33 = 33$$

$$L = \{12; -3\}$$

Gleichsetzungsverfahren

1.) Löse beide Gleichungen nach der gleichen Variablen auf.

2.) Setze die anderen Seiten der Gleichungen einander gleich.

3.) Löse die so entstandene Gleichung nach der enthaltenen Variablen auf.

4.) Setze die Lösung in eine der umgeformten Gleichungen aus Schritt 1 ein und berechne so die andere Variable.

1.) Gleichung II nach y umstellen

$$\begin{array}{ll} I & y = 3x - 3 \\ II & y - x = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} y - x = 1 & /+x \\ y = x + 1 & \end{array}$$

Gleichung I

Gleichung II

$$\begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ y = x + 1 \end{array}$$

2.)Gleichungen gleichsetzen

$$3x - 3 = x + 1$$

3.) auflösen nach Variablen

$$\begin{array}{rl} 3x - 3 = x + 1 & /-x \\ 2x - 3 = 1 & /+3 \\ 2x = 4 & /:2 \\ \boxed{x = 2} & \end{array}$$

4.) in eine Ursprungsgleichung einsetzen

$$\begin{array}{l} y = 3x - 3 \\ y = 3 \cdot 2 - 3 \\ \boxed{y = 3} \end{array}$$

Gleichsetzungsverfahren - Hinweis

Achtung:

Das Gleichungssystem

I: $3x - 4y = 17$

II: $2x + 3y = 17$

könnte zum Ansatz I=II: $3x - 4y = 2x + 3y$ verleiten.

Das wäre zwar korrekt, denn 17 ist nunmal gleich 17, doch bringt es nichts, da dies noch immer eine Gleichung mit zwei Unbekannten ist.

Es fällt nur dann eine Variable weg, wenn man beide Gleichungen nach dieser auflöst und sie durchs Gleichsetzen sozusagen "kurzschließt".

Vergleich Kosten

Sie möchten zum Flughafen und benötigen ein Fahrzeug.

Frage:

Welches Fahrzeug ist für die Vorgesehene Strecke am Kostengünstigsten?

These aufstellen: Welches Fahrzeug eignet sich für welche Art von Strecke (Kurz, Lang)

Fahrzeug	Grundgebühr	Kosten/km
Taxi	3,9 €	2 €
Mietwagen	75 €	0,95 €

Vergleich Kosten

Lösung: Aufstellen eines LGS. → Gleichsetzungsverfahren!

Fahrzeug	Gesamtpreis in €	Grundgebühr in €	Kosten in €/km
Taxi	y	3,9	2 • x
Mietwagen	Y	75	0,95 • x

$$\begin{aligned} y &= 3{,}9 + 2x \\ y &= 75 + 0{,}95x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3{,}9 + 2x &= 75 + 0{,}95x \quad && / -0{,}95x \\ 3{,}9 + 1{,}05x &= 75 && / -3{,}9 \\ 1{,}05x &= 71{,}1 && / : 1{,}05 \\ x &= \underline{\underline{67{,}71}} \end{aligned}$$

Ab 67,71km Fahrstrecke lohnt sich der Mietwagen.

In eine Ausgangsgleichung einsetzen

$$y = 3{,}9 + 2 \cdot 67{,}71$$

$$y = \underline{\underline{139{,}33}}$$

Die Kosten bis zur Parität: 139,33€

Einsetzungsverfahren

Man stellt eine beliebige Gleichung nach einer beliebigen Variablen um und setzt den Ergebnisterm in die andere Gleichung ein.

$$\begin{array}{r} 5x-2y=1 \\ 3x+y=5 \end{array}$$

Variable ohne Koeffizienten wählen, sonst entsteht ein Bruch → y

$$\begin{array}{r} 3x+y=5 \quad /-3x \\ y=5-3x \end{array}$$

Gleichung einsetzen

$$\begin{array}{r} 5x-2(5-3x)=1 \quad /\,klammer\ auflösen \\ 5x-10+6x=1 \quad /\,zusammenfa\,ssen \\ 11x-10=1 \quad /+10 \\ 11x=11/:11 \\ \boxed{x=1} \end{array}$$

Zeile für Zeile rückwärts durchsuchen, bis man an die erste Gleichung mit y kommt.

$$\begin{array}{l} y=5-3\cdot 1 \\ \boxed{y=2} \end{array}$$

$$\boxed{L=\{1;2\}}$$

Grundstück umzäunen

Sie möchten ein Grundstück (eine Seite wird durch einen Fluss begrenzt) umzäunen.

Es sind 130 m Zaun Vorhanden.

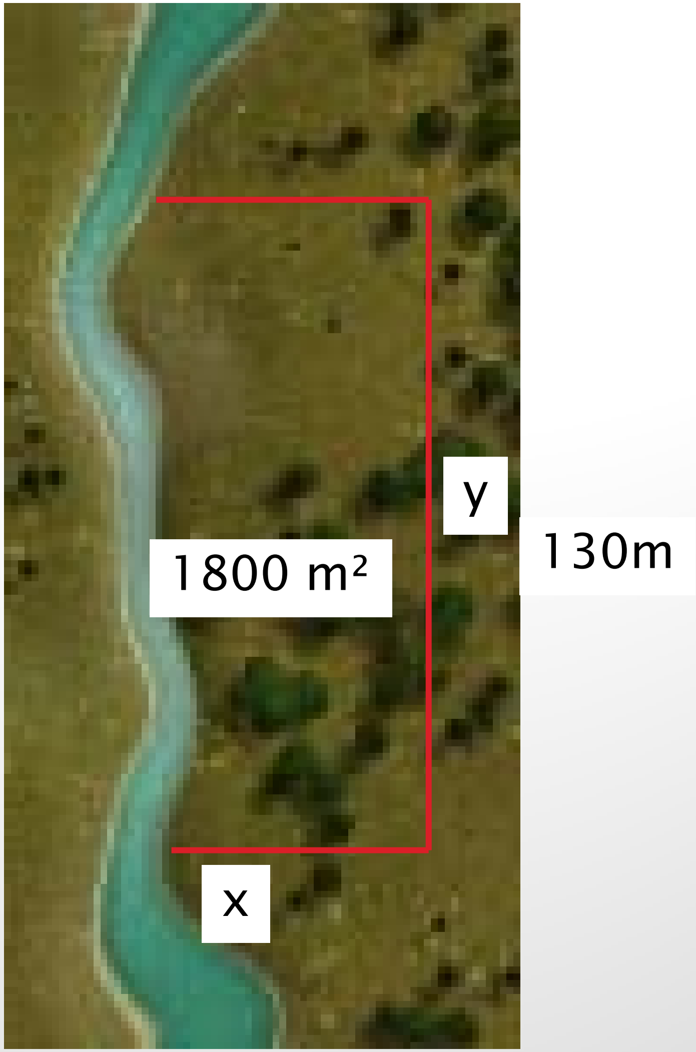
Es soll ein rechteckiges Grundstück von 1800 m² Fläche umzäunt werden.

Frage:

Reichen die vorhandenen Zaunteile?

Welche Möglichkeiten der Umzäunung haben Sie?

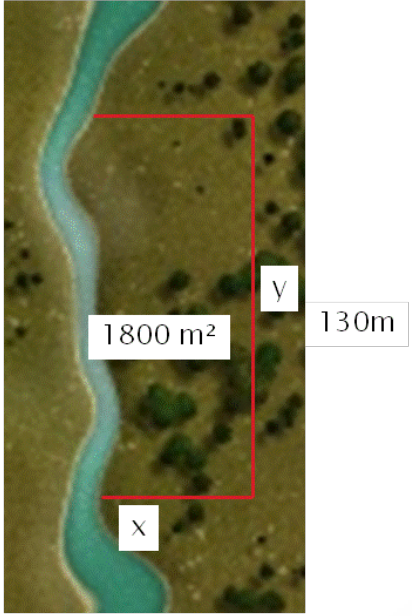
$$\left| \begin{aligned} x \cdot y &= 1800 \\ 2x + y &= 130 \end{aligned} \right|$$



Grundstück umzäunen

$$\left| \begin{aligned} x \cdot y &= 1800 \\ 2x + y &= 130 \end{aligned} \right|$$

Gleichung 1 nach y umstellen



$$x \cdot y = 1800 \quad / : x$$

$$y = \frac{1800}{x}$$

In 2. Gleichung einsetzen

$$2x + \frac{1800}{x} = 130$$

Nach x auflösen

$$2x + \frac{1800}{x} = 130 \quad / \cdot x$$

$$2x^2 + 1800 = 130x \quad / -130x$$

$$2x^2 - 130x + 1800 = 0$$

$$2x^2 - 130x + 1800 = 0 \quad / : 2$$

$$x^2 - 65x + 900 = 0 \quad / \; p,q-Formel$$

$$x_1 = 32{,}5 + \sqrt{32{,}5^2 - 900} = 45$$

$$x_2 = 32{,}5 - \sqrt{32{,}5^2 - 900} = 20$$

$$y_1 = \frac{1800}{x_1} = \frac{1800}{45} = 40$$

$$y_2 = \frac{1800}{x_2} = \frac{1800}{20} = 90$$

$$L_1 = \{45;40\}$$

$$L_2 = \{20;90\}$$

Einsetzungsverfahren bei mehr als zwei Variablen

Man stellt eine beliebige Gleichung nach einer beliebigen Variablen um und setzt den Ergebnisterm in **alle anderen** Gleichungen ein.

$$\begin{array}{ll} I & 3x-2y+3z=8 \\ II & 5x+y-2z=1 \\ III & -2x+3y-z=1 \end{array}$$

Variable ohne Koeffizienten wählen, sonst entsteht ein Bruch → y oder z
„y“ gewählt

$$\begin{array}{lr} 5x+y-2z=1 & /+2z \\ 5x+y\quad=1+2z & /-5x \\ y=1-5x+2z & \end{array}$$

Ergebnis in beide anderen Gleichungen einsetzen

$$\begin{array}{l} 3x-2(1-5x+2z)+3z=8 \\ -2x+3(1-5x+2z)-z=1 \end{array}$$

Klammern auflösen und zusammenfassen

$$\begin{array}{rl} 3x-2(1-5x+2z)+3z=8 & /\,klammer\ auflösen \\ 3x-2+10x-4z+3z=8 & /\,zusammenfassen \\ 13x-z-2=8 & /+2 \\ \boxed{13x-z=10} & \\ & \\ -2x+3(1-5x+2z)-z=1 & /\,klammer\ auflösen \\ -2x+3-15x+6z-z=1 & /\,zusammenfassen \\ -17x+5z+3=1 & /-3 \\ \boxed{-17x+5z=-2} & \end{array}$$

Die markierten Gleichungen stellen ein neues lineares Gleichungssystem dar, der 1. Reduktionsschritt ist abgeschlossen.

Einsetzungsverfahren bei mehr als zwei Variablen

$$\begin{array}{ll} Ia & 13x - z = 10 \\ IIa & -17x + 5z = -2 \end{array}$$

Ein beliebiges Verfahren zur Lösung verwenden.
→ Hier bietet sich das einzelne „z“ an

$$\begin{aligned} 13x - z &= 10 && /-13x \\ -z &= 10 - 13x && /\cdot(-1) \\ z &= 13x - 10 \end{aligned}$$

Gleichung in IIa einsetzen

$$\begin{aligned} -17x + 5(13x - 10) &= -2 && /\,klammer\ auflösen \\ -17x + 65x - 50 &= -2 && /\,zusammenfassen \\ 48x - 50 &= -2 && /+50 \\ 48x &= 48 && /:48 \\ \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

Zeile für Zeile rückwärts durchsuchen, bis man an die erste Gleichung **mit z** kommt.

$$\begin{aligned} z &= 13x - 10 && /\,x = 1 \\ z &= 13 \cdot 1 - 10 \\ \boxed{z = 3} \end{aligned}$$

Zeile für Zeile rückwärts durchsuchen, bis man an die erste Gleichung **mit y** kommt.

$$y = 1 - 5x + 2z$$

ermittelte Werte einsetzen

$$\begin{aligned} y &= 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ y &= 1 - 5 + 6 \\ \boxed{y = 2} \end{aligned}$$

$$\boxed{L = \{1;2;3\}}$$

Anzahl der Lösungen eines LGS

Nehmen wir an, dass ein Zahlenpaar (x,y) die Lösung einer „linearen Gleichung mit zwei Variablen“ ist.

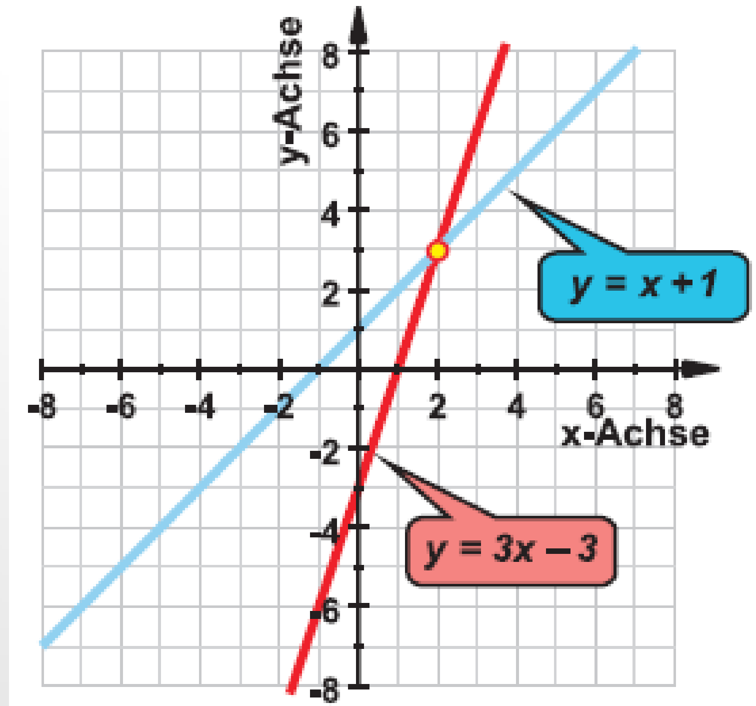
Wird nun verlangt, dass ein Zahlenpaar (x,y) auch die Lösung einer zweiten linearen Gleichung sein soll, dann bilden die beiden Gleichungen ein sogenanntes **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen**.

Weil das Zahlenpaar (x,y) sowohl Lösung der ersten als auch der zweiten Gleichung sein soll, muss das Zahlenpaar auf beiden Graphen liegen, entweder weil das Zahlenpaar **Schnittpunkt der Graphen** ist, oder weil die **Graphen gleich** sind.

Falls die Graphen sich nicht schneiden, hat auch das Gleichungssystem **keine Lösung**.

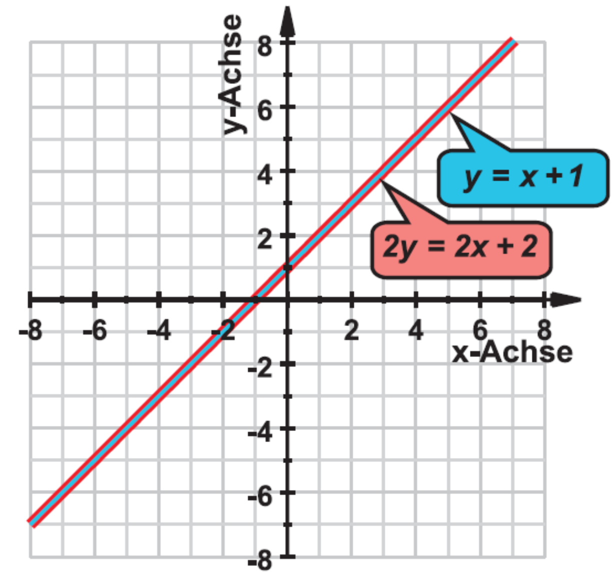
Man unterscheidet also drei Fälle bei „linearen Gleichungssystemen mit zwei Variablen“:

Eine Lösung:
Das lineare Gleichungssystem hat eine einzige Lösung. Es ist **Schnittpunkt** der Graphen, im Beispiel ist es der gelbe Punkt mit den Koordinaten (2,3).

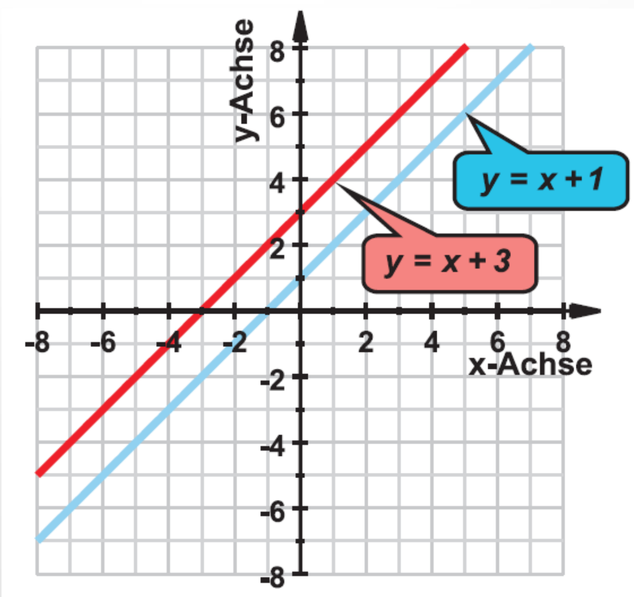


Anzahl der Lösungen eines LGS

Unendlich viele Lösungen:
Die Graphen sind **identisch**. Jedes Zahlenpaar (x,y), dass eine der Gleichungen erfüllt, ist Lösung des linearen Gleichungssystems.



Keine Lösung:
Die Graphen liegen **parallel** und haben daher keinen Schnittpunkt. Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung.

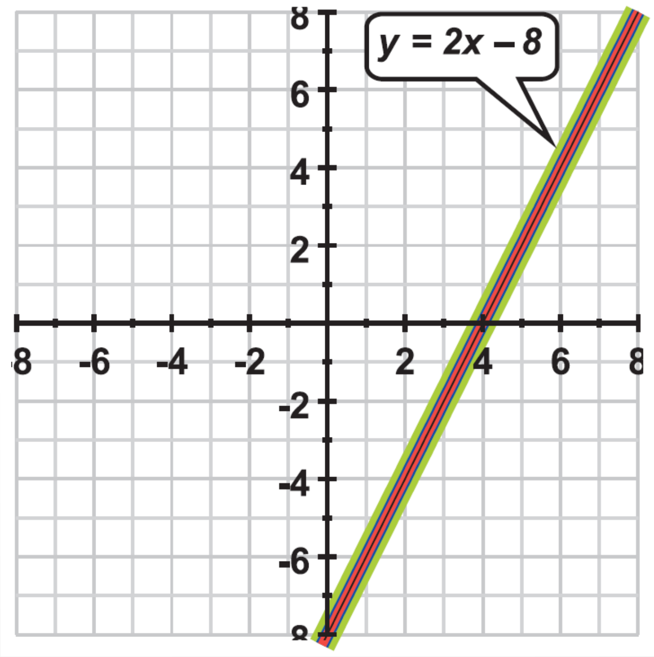


Beispiele

Unendlich viele Lösungen

(**zwei** Variablen und **vier** Gleichungen) → Überbestimmtes System *(mehr Gleichungen als Variablen)*

$$\boxed{\begin{aligned} 2x-y&=8\\ 6x-3y&=24\\ 4x&=16+2y\\ 10x-5y&=40 \end{aligned}} \xrightarrow{\text{umgestellt nach y}} \boxed{\begin{aligned} y&=2x-8\\ y&=2x-8\\ y&=2x-8\\ y&=2x-8 \end{aligned}}$$



Die zu den Gleichungen gehörenden Funktionen sind alle **identisch**.

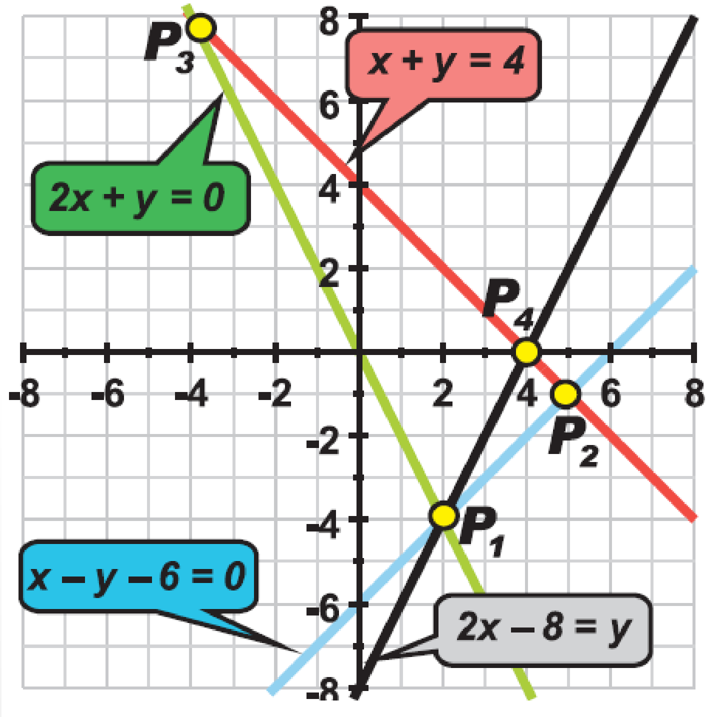
Die Funktionen haben somit **unendlich viele Schnittpunkte** und daher hat das System **unendlich viele Lösungen**, nämlich jeden Punkt, der auf der Geraden y=2x–8 liegt.

Beispiele

Keine Lösung

(**zwei** Variablen und **vier** Gleichungen) → Überbestimmtes System *(mehr Gleichungen als Variablen)*

$$\boxed{\begin{aligned} 2x+y&=0 \\ 2x-8&=y \\ x-y-6&=0 \\ x+y&=4 \end{aligned}} \xrightarrow{\text{umgestellt nach y}} \boxed{\begin{aligned} y&=-2x \\ y&=2x-8 \\ y&=x-6 \\ y&=-x+4 \end{aligned}}$$



Es gibt **keinen** Punkt, in dem sich

alle vier Funktionen schneiden.

Das Gleichungssystem hat daher keine Lösung

Beispiele

Rechnerische Lösung eines überbestimmten Systems

(**zwei** Variablen und **vier** Gleichungen) → Überbestimmtes System *(mehr Gleichungen als Variablen)*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 2x - 8 &= y \\ x - y - 6 &= 0 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

Teilsystem bilden

zwei beliebige Gleichungen als GS, z.B.: die ersten beiden:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ 2x - 8 &= y \end{aligned}$$

Lösung mittels Einsetzungsverfahren

Gleichung II in Gleichung I einsetzen

$$\begin{aligned} &2x + 2x - 8 = 0 \\ &(2x - 8 = y) \end{aligned}$$

1. Gleichung nach x auflösen

$$\begin{aligned} 2x + 2x - 8 &= 0 \quad / \mathit{zusammenfassen} \\ 4x - 8 &= 0 \quad / +8 \\ 4x &= 8 \quad / :4 \\ \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

Ergebnis in die 2. Gleichung einsetzen

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 - 8 &= y \\ \boxed{y = -4} \end{aligned}$$

Lösung in die 3. Gleichung einsetzen

$$\begin{aligned} x - y - 6 &= 0 \\ 2 - (-4) - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

wahre Aussage! Auch die 3. Funktion geht durch den Punkt (2;-4)

Lösung in die 4. Gleichung einsetzen

$$\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2 + (-4) &= 4 \\ -2 &= 4 \Rightarrow \mathit{falsche\ Aussage!} \end{aligned}$$

Die Funktion geht **nicht** durch den Punkt (2;-4)