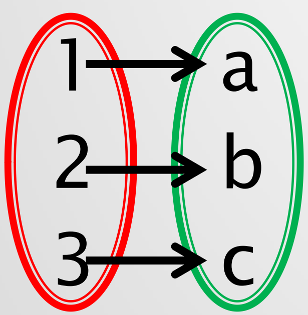
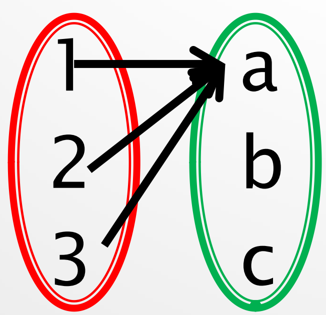
Lineare Funktionen

Definition

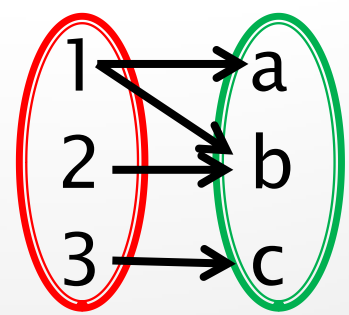
Eine Funktion ist eine Zuordnung die jeden Wert aus dem Definitionsbereich D genau einen Wert aus dem Wertebereich W zuordnet.



eine Funktion

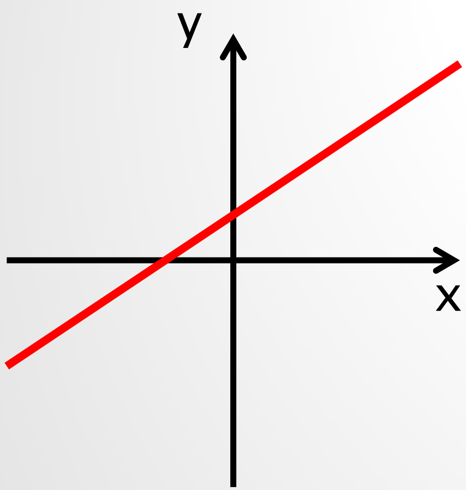


eine Funktion

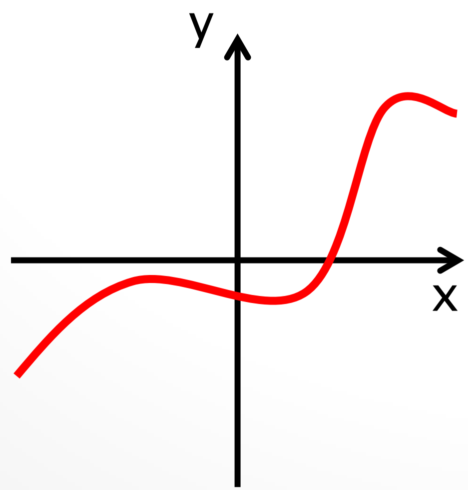


keine Funktion

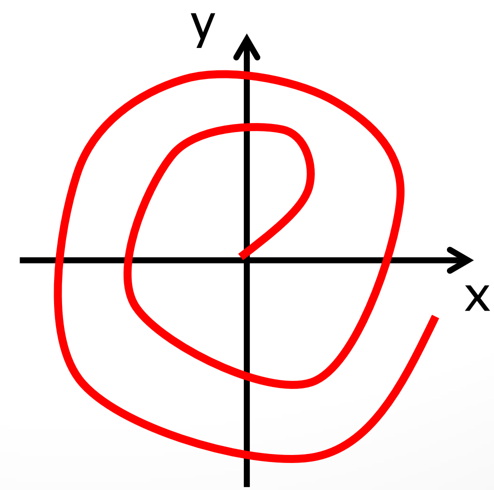
Darstellung



eine Funktion



eine Funktion



keine Funktion

Zu jeden x–Wert gibt es nur einen y Wert

Zuordnungsvorschrift

Die Elemente einer bestimmten Menge an Elementen sind einer anderen Menge an Elementen zugeordnet.

z.B. D → W

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow f_{(x)} = mx+n$

(Erläuterungen folgen später)

$x \rightarrow f_{(x)} = 2x+3$

Funktionsgleichung

$f_{(x)} \quad = \quad 2x+3$; → unter der Bedingung $f_{(x)}=y$

$y \quad = \quad 2x+3$

Diese Gleichungen nennt man Funktionsgleichungen. Daraus lässt sich bei Bedarf eine Wertetabelle bestimmen und der Graph G_f im Koordinatensystem erstellen.

Wertetabelle

$y=2x+3$

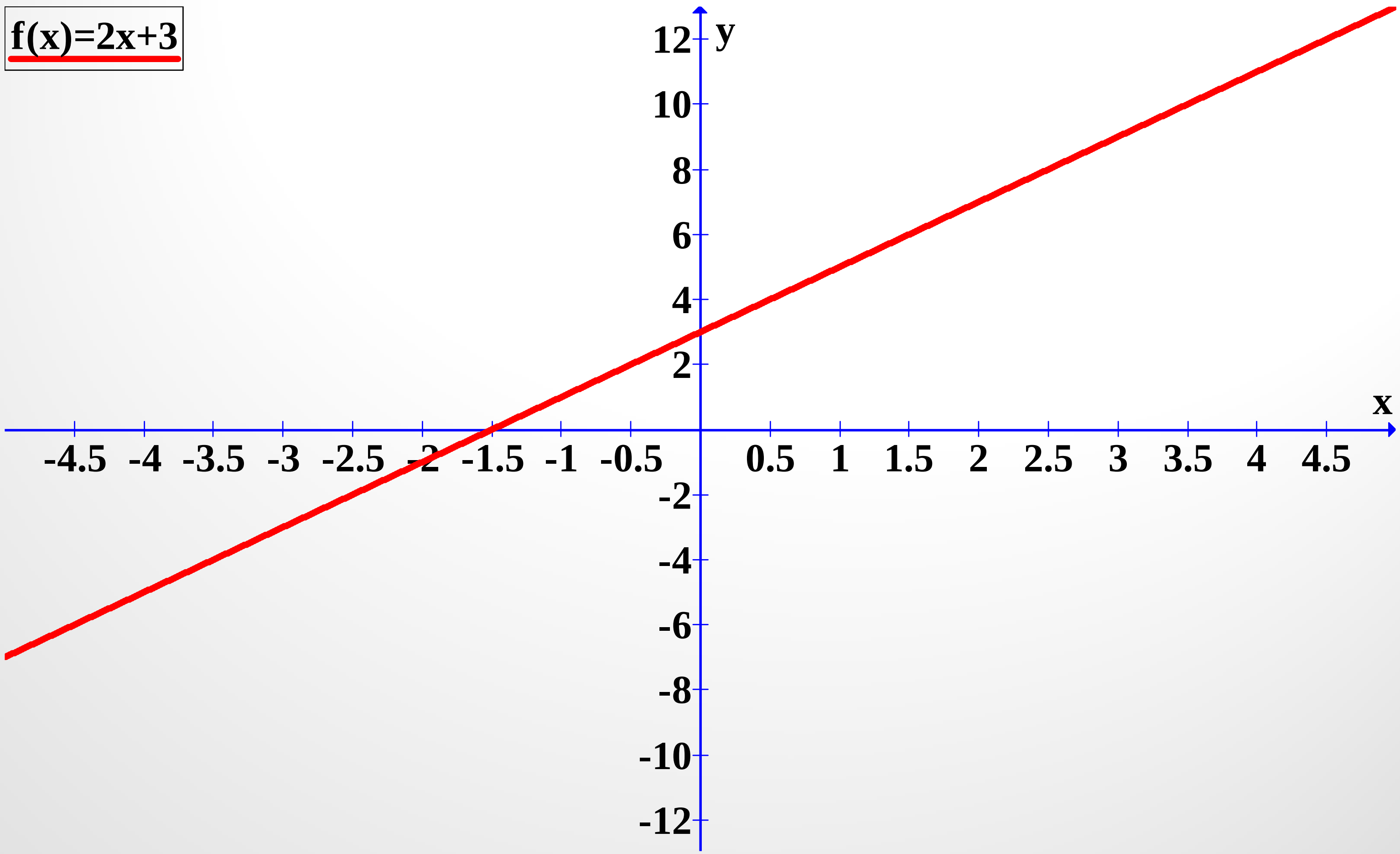
Für x werden die gewünschten Werte eingesetzt und anschließend y berechnet.

Beispiel:

$$y=2x+3 \quad | \ x=1$$
$$y=2*1+3$$
$$y=2+3$$
$$y=5$$

Wertetabelle

x	y
−5	−7
−4	−5
−3	−3
−2	−1
−1	1
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13



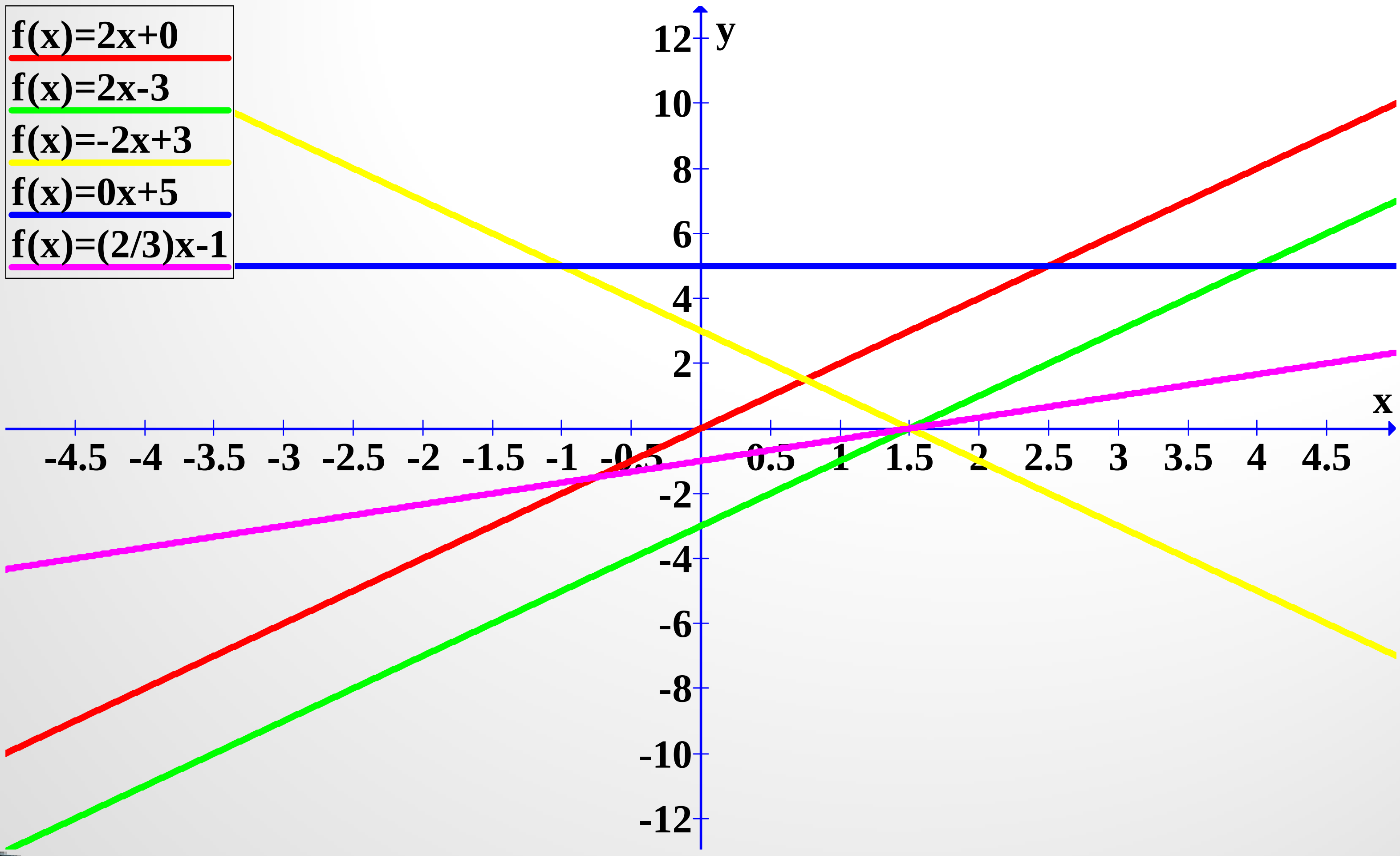
Faktoren

x→ $f_{(x)} = mx+n$

m → Steigungsfaktor
Der Steigungsfaktor gibt an, um das wievielfache sich der y-Wert verändert.

n→ Schnittpunkt mit der y-Achse
n gibt an wo der Graph die y-Achse schneidet.

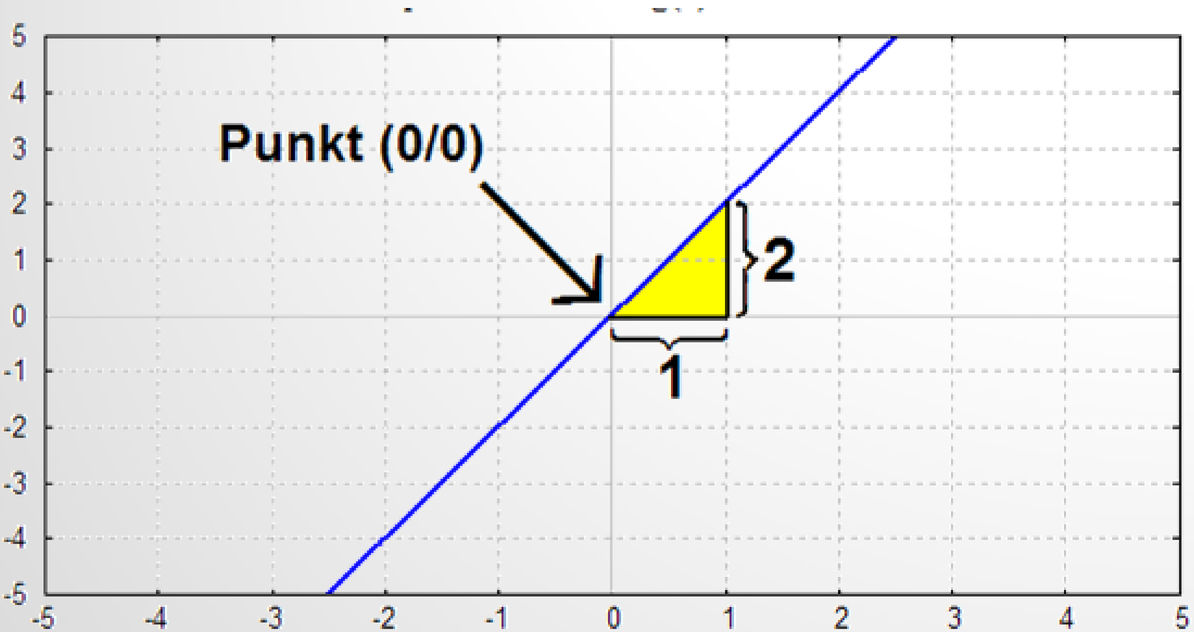
Faktoren



f(x)=2x+0
f(x)=2x-3
f(x)=-2x+3
f(x)=0x+5
f(x)=(2/3)x-1
y
x
12
10
8
6
4
2
-2
-4
-6
-8
-10
-12
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

Bestimmung des Steigungsfaktors

Um eine Steigung zu ermitteln benötigt man das Steigungsdreieck.



Ein Schritt zur Seite und zwei Schritte hoch ergibt eine Steigung von 2.

$$m = \tan\alpha = \frac{gegK}{anK}$$

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Berechnung des Steigungsfaktor

Der Steigungsfaktor einer linearen Funktion berechnet sich aus den zwei Punkten $P_1(x_1;y_1)$ und P_2 $(x_2;y_2)$, in dem man die Differenz aus Δy durch Δx dividiert.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Berechnung des Steigungsfaktor

Beispiel

$P_1(1;5)$

$P_2(4;11)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{11-5}{4-1} = \frac{6}{3} = 2$$

Rekonstruktion einer linearen Funktion

Bei der Rekonstruktion wird aus gegebenen Punkten die Funktionsgleichung erzeugt.

Beispiel:

$P_1(2;7)$; $P_2(5;13)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{13-7}{5-2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y = mx + n$$

$$7 = 2*2 + n$$

$$7 = 4 + n$$

$$3 = n$$

$$y = 2x + 3$$

Nullstelle

Die Nullstelle ist der Schnittpunkt des Graphen mit der x–Achse → $f_{(x)}=0$

Beispiel:

$$f_x = y = 0 = 2x + 3$$

$$0 = 2x + 3$$

$$-3 = 2x$$

$$-1{,}5 = x$$

Die Nullstelle liegt bei –1,5 und der Nullpunkt bei (–1,5;0).

Eine Stelle benötigt nur die x–Koordinate, ein Punkt immer beide Koordinaten.

Bestimmung des Steigungswinkel

Es wird die Steigung m berechnet.
Es gilt m = $\tan\alpha$

Daraus ergibt sich: $\alpha = \tan^{-1}(m)$

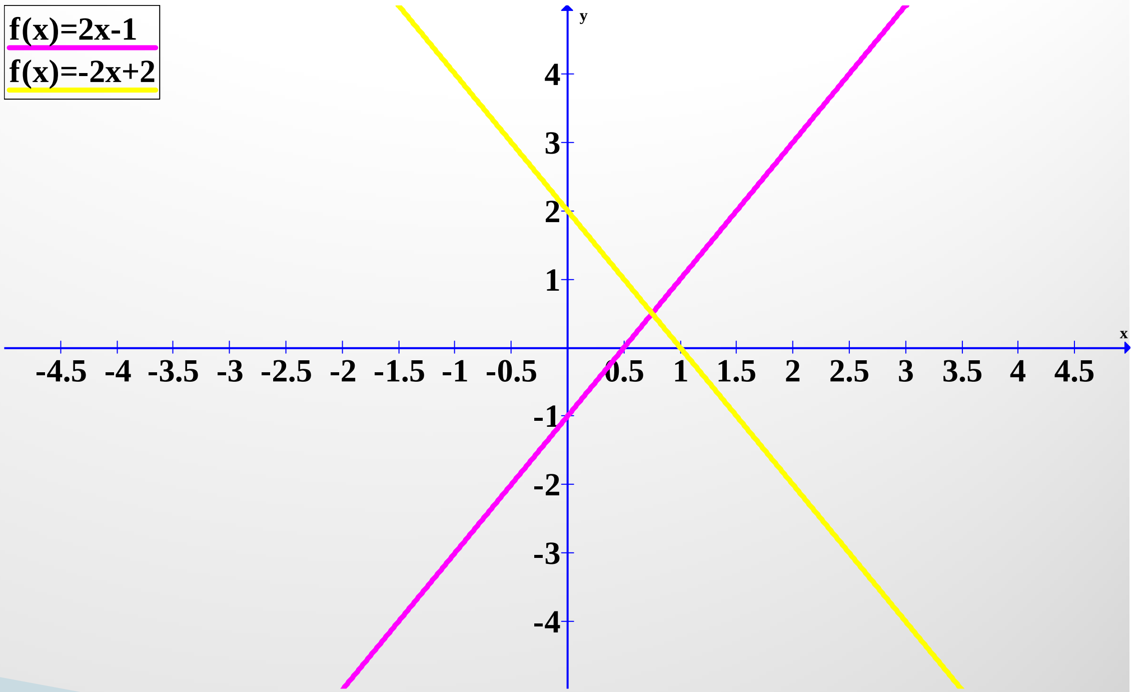
Beispiel mit m=2:

$$\alpha = \tan^{-1}(2)$$

$$\alpha = 63{,}43°$$

Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden

Bei der Bestimmung des Schnittpunktes sind die Funktionsgleichungen beider Geraden Gleichzusetzen, da beide geraden den Schnittpunkt $P_S(x_s;y_s)$ gemeinsam haben.



Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden

$$y_1 = m_1 x_1 + n_1$$
$$y_2 = m_2 x_2 + n_2$$

$$y_1 = y_2 = y_s$$
$$m_1 x_1 + n_1 = m_2 x_2 + n_2$$

$$x_1 = x_2 = x_s$$
$$m_1 x_s + n_1 = m_2 x_s + n_2$$

Beispiel

$$y_1 = 2x - 1$$
$$y_2 = -2x + 2$$
$$y_1 = y_2$$
$$2x - 1 = -2x + 2 \,|\, +2x$$
$$4x - 1 = 2 \,|\, +1$$
$$4x = 3 \,|\, \div 4$$
$$x_s = \frac{3}{4}$$
$$y_1 = y_s = 2 \cdot \frac{3}{4} - 1 = \frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$y_2 = y_s = -2 \cdot \frac{3}{4} + 2 = -\frac{6}{4} + \frac{8}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

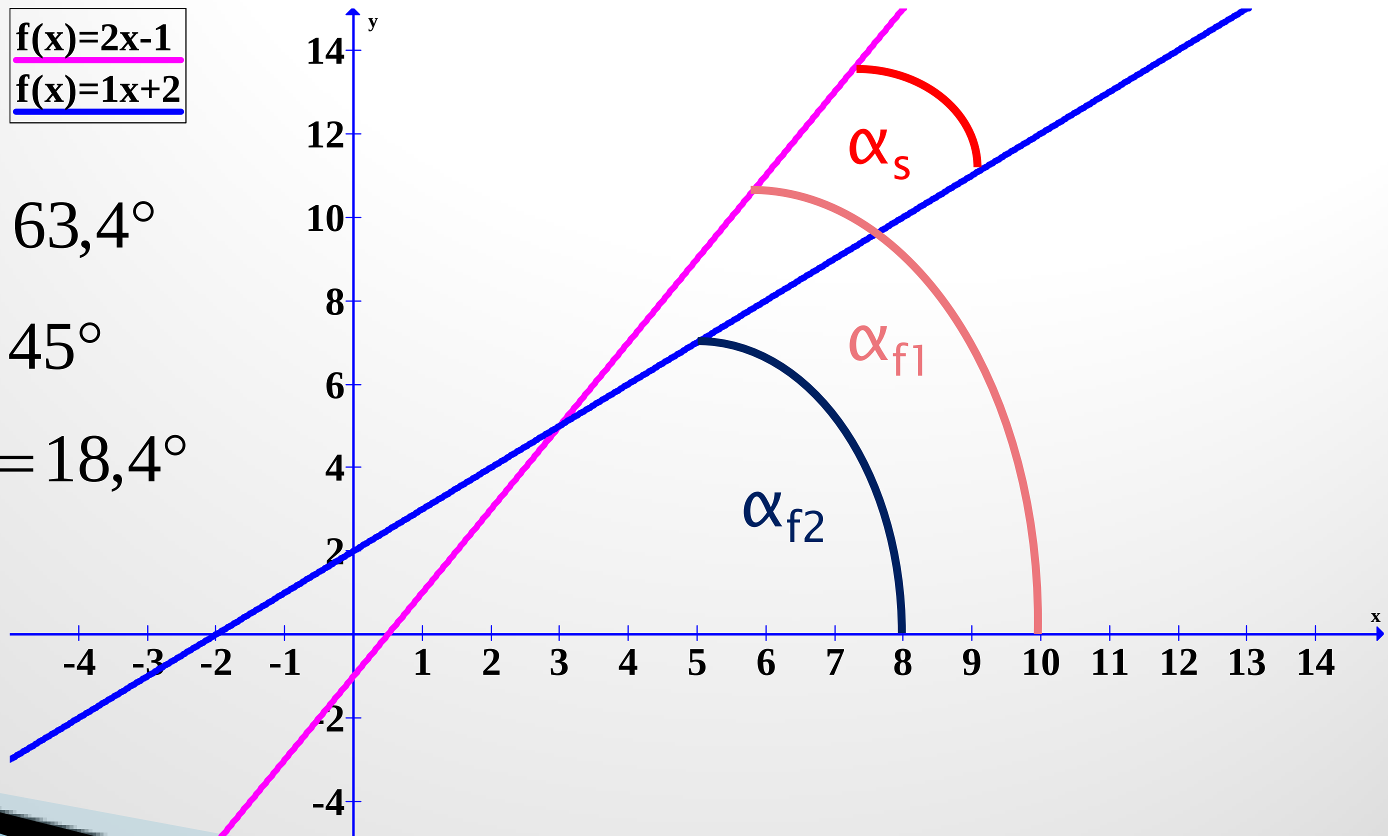
Bestimmung des Schnittwinkel

Der Schnittwinkel ist die Differenz der beiden Steigungswinkel.

$$\alpha_{f1} = \tan^{1}(2) = 63{,}4°$$

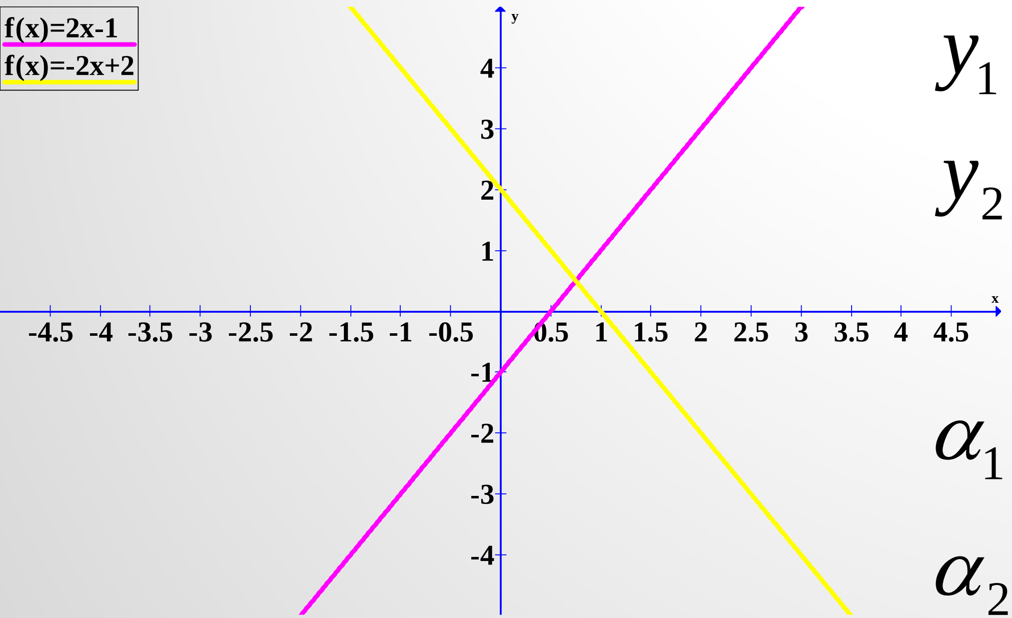
$$\alpha_{f2} = \tan^{1}(1) = 45°$$

$$\alpha_{s} = \alpha_{f1} - \alpha_{f2} = 18{,}4°$$



Bestimmung des Schnittwinkels

Bei einer fallenden Geraden ergibt sich ein negativer Steigungswinkel.



$$y_1 = 2x - 1$$

$$y_2 = -2x + 2$$

$$\alpha_1 = \tan^{-1}(2) = 63{,}4°$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(-2) = -63{,}4°$$

$$\alpha_s = 63{,}4° - (-63{,}4°) = 126{,}8°$$

Orthogonale Geraden

Orthogonale Geraden stehen im Schnittpunkt senkrecht aufeinander

Beispiel:
Funktion 1 hat einen Steigungswinkel von 10° und Funktion 2 hat einen Steigungswinkel von 100°.

$$\tan(10°) = 0{,}18$$

$$\tan(100°) = -5{,}67$$

$$\tan(10°) \cdot \tan(100°) = -1$$

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Orthogonale Geraden

Wenn das Produkt der steigungsfaktoren zweier Geraden –1 ergibt stehen sie senkrecht zueinander. Man sagt sie sind orthogonal und schreibt $f_1 \perp f_2$.
Folglich kann man bei zwei orthogonalen Geraden bei einer bekannten Steigung die andere ermitteln.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

Orthogonale Geraden

Beispiel:

$$f_1 = 2x + n$$

$$f_2 = m_2 x + n$$

$$m_2 = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

$$\alpha_2 = \tan^{-1}(-0{,}5) = -26{,}57$$