Mathematik

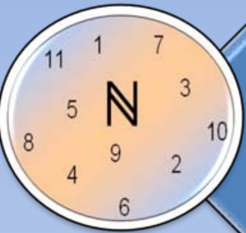
Inhalt

- Zahlenbereiche
- Rechenoperationen
- Hierarchie der Rechenoperationen
- Rechenregeln
- Brüche
- Rechenregeln für Brüche
- Klammerrechnen
- Potenzrechnung
- Potenzgesetze

Irrationale Zahlen

Zahlenbereiche

Jeder Zahlenbereich ist eine Erweiterung des vorigen und enthält diesen

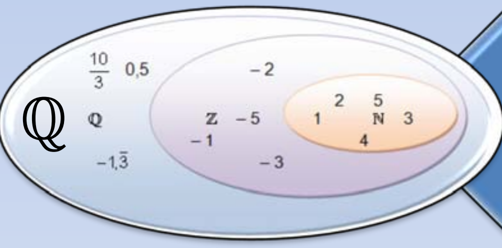


Natürliche Zahlen

- **ℕ={0,1,2,3,...}** umfasst die natürlichsten Zahlen, nämlich jene, die uns beim Zählen von Gegenständen begegnen.
  - Nach DIN-Norm 5473 gehört die Null zu den natürlichen Zahlen, d.h. N={0,1,2,3,...}; zuvor definierte man die Menge natürlichen Zahlen als N={1,2,3,...} Um die 0 definitiv **auszuschließen**, schreibt man **N***. Demnach ist die Menge aller positiven ganzen Zahlen definiert als: **N** \{0} =: **N***

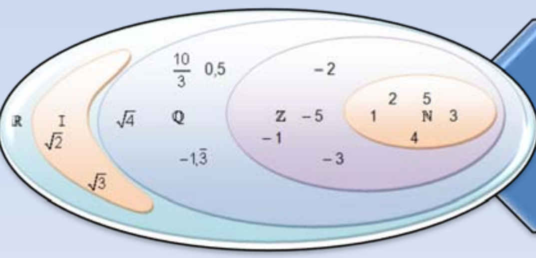
Ganze Zahlen

- **ℤ = {..., -3,-2,-1,0,+1,+2,+3...}**
- Warum ein neuer Zahlenbereich? → man gibt mehr Geld aus, als einem zur Verfügung steht, wird der Kontostand durch eine negative Zahl angegeben, die außerhalb der natürlichen Zahlen liegt
- ℕ⊂ ℤ. Man sagt: Die Menge ℕ der natürlichen Zahlen ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen ℤ.



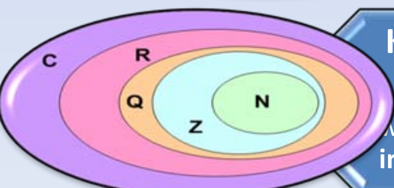
Rationale Zahlen

- **ℚ = {a/b : a,b ∈ ℤ und b ≠ 0}**
- die Menge der ganzen Zahlen um die Menge aller Divisionsergebnisse, d.h. um die Menge aller möglichen Brüche a/b, erweitert.
- ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ → **Für alle rationalen Zahlen a,b ∈ ℚ gilt: a+b ∈ ℚ, a-b ∈ ℚ, a·b ∈ ℚ und a:b ∈ ℚ**



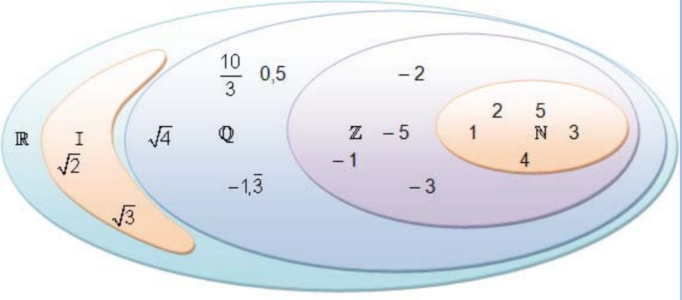
Reelle Zahlen

- **R={2, π, e}**
- Die Menge der reellen Zahlen ist die Vereinigungsmenge der rationalen Zahlen und irrationalen Zahlen ℝ = ℚ ∪ I
- ℕ ⊂ ℤ ⊂ ℚ ⊂ ℝ.



Komplexe Zahlen

Um auch Wurzeln aus negativen Zahlen ziehen zu können, muss ℝ zu den sogenannten **komplexen Zahlen** ℂ erweitert werden. In dieser Zahlenmenge ℂ hat die Gleichung $x = \sqrt{-1}$ dann zwei verschiedene Lösungen: $x_1=+i$, $x_2=-i$, wobei i die **imaginäre Einheit** bezeichnet.



Zusammenfassung

• Im Zuge der Behandlung unterschiedlicher Zahlenmengen haben wir die natürlichen Zahlen sukzessive bis hin zu den reellen Zahlen erweitert. Dabei gilt folgende Beziehung: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

• Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen dicht auf der Zahlengerade, d.h. zwischen zwei beliebigen rationale Zahlen lässt sich immer eine weitere rationale Zahl finden.

• Obwohl $\mathbb{Q}$ dicht ist, bleiben doch Lücken auf der Zahlengerade bestehen. Erst die reellen Zahlen umfassen den Zahlenstrahl komplett, man sagt $\mathbb{R}$ ist vollständig.

• Nicht alle Rechenoperationen sind in allen Mengen unbeschränkt ausführbar.

Die in den unterschiedlichen Zahlenmengen stets ausführbaren Operationen:

$\mathbb{N}$ → **Natürliche Zahlen**: Addition, Multiplikation

$\mathbb{Z}$ → **Ganze Zahlen**: Addition, Multiplikation, Subtraktion

$\mathbb{Q}$ → **Rationale Zahlen**: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division (außer durch Null)

$\mathbb{R}$ → **Reelle Zahlen**: Addition, Multiplikation, Subtraktion, Division (außer durch Null)

Rechenoperationen - Addition

Zahlenbereich: $\mathbb{N}$

Mit je zwei natürlichen Zahlen *m* und *n* ist auch die Summe *m+n* wieder eine natürliche Zahl.

In den natürlichen Zahlen gelten folgende Rechengesetze mit m,n,k $\in \mathbb{N}$

- **Kommutativgesetz (***Vertauschungsgesetz* **)** für Addition: m + n = n + m
- **Assoziativgesetz** (*Verknüpfungsgesetz*) für Addition: (m + n) + k = m + (n + k)

Beispiele:

ist Element der Natürlichen Zahlen

	Summand	+	Summand	=	Summe		
➢	2	+	7	=	9	$\in \mathbb{N}$	Kommutativgesetz
➢	7	+	2	=	9		
➢	12	+	14	=	26		
➢	14	+	12	=	26		

	Summand	+	Summand	+	Summand	=	Summe	
➢	(4	+	3)	+	2	=	7 + 2 = 9	Assoziativgesetz
➢	4	+	(3	+	2)	=	4 + 5 = 9	
➢	(4	+	2)	+	3	=	6 + 3 = 9	

Rechenoperationen - Subtraktion

Zahlenbereich: $\mathbb{Z}$

Definition: Eine Zahl $\mathbb{Z}$ heißt ganz, wenn es natürliche Zahlen n, m mit z = n-m gibt. (gilt nur, wenn N die 0 enthält!)

In den ganzen Zahlen gelten folgende Rechengesetze <u>für die Subtraktion **nicht!**</u>

- **Kommutativgesetz (***Vertauschungsgesetz* **)** für Subtraktion: $m - n \neq n - m$
- **Assoziativgesetz** (*Verknüpfungsgesetz*) für Subtraktion: $(m - n) - k \neq m - (n - k)$

Beispiele:

	Minuend	-	Subtrahend	=	Differenz
➢	8	-	2	=	6
➢	2	-	8	=	-6
➢	26	-	12	=	14
➢	12	-	26	≠	-14

$\in \mathbb{Z}$

ist Element der Ganzen Zahlen

Rechenoperationen - Multiplikation

Zahlenbereich: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$

Mit je zwei natürlichen Zahlen *m* und *n* ist auch das Produkt m·n wieder eine natürliche Zahl.
Die Multiplikation natürlicher Zahlen entsteht durch das wiederholte Addieren (Zusammenzählen) des gleichen Summanden: Zum Beispiel schreibt man **3 · 4** für **4 + 4 + 4** und spricht diesen Term als **"dreimal vier"**.

In den Natürlichen / Ganzen Zahlen gelten folgende Rechengesetze mit m,n,k $\in \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

- **Kommutativgesetz (***Vertauschungsgesetz* **)** für Multiplikation: m • n = n • m
- **Assoziativgesetz** (*Verknüpfungsgesetz*) für Multiplikation: (m • n)• k = m • (n • k)
- **Distributivgesetz** (*Verteilungsgesetz*): m • (n + k) = m • n + m • k

Beispiele:

ist Element der Natürlichen/ Ganzen Zahlen

	Faktor	•	Faktor	=	Produkt	
➢	2	•	7	=	14	$\in \mathbb{N}$
➢	7	•	2	=	14	$\in \mathbb{N}$
➢	7	•	-2	=	-14	$\in \mathbb{Z}$
➢	12	•	14	=	168	$\in \mathbb{N}$
➢	14	•	12	=	168	$\in \mathbb{N}$

Kommutativgesetz

	Faktor	•	Faktor	•	Faktor	=	Produkt
➢	(4	•	3)	•	2	=	12 • 2 = 24
➢	4	•	(3	•	2)	=	4 • 6 = 24
➢	(4	•	2)	•	3	=	8 • 3 = 24
➢	4	•	(-3	•	2)	=	4 • (-6) = -24

Assoziativgesetz

Rechenoperationen - Division

Zahlenbereich: $\mathbb{Q}$

Sie ist die Umkehrung der Multiplikation. Die Division wird umgangssprachlich auch als Teilen bezeichnet.
… ist die Menge aller Brüche der Form *m*/*n*, wobei *m* eine ganze und *n* eine natürliche Zahl ist: So sind 4/87 und -5/7 Beispiele rationaler Zahlen.

- Die Zahl, die geteilt wird (*a*), heißt **Dividend**.
- Die Zahl, durch die geteilt wird (*b*), heißt **Divisor**.
- Das Ergebnis der *Division* heißt **Quotient**

Der *Divisor* muss unbedingt **ungleich 0** sein, da der *Quotient a* / *b* als Lösung der Gleichung *b* · *x* = *a* definiert ist, und diese Gleichung für *b* = 0 entweder gar keine (für *a* ungleich 0) oder mehr als eine Lösung hat (für *a* gleich 0).
Für die *Division* gilt weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz.

Beispiele:

ist Element der Natürlichen, Ganzen oder Rationalen Zahlen

	Dividend	:	Divisor	=	Quotient	
➢	16	:	8	=	2	$\in \mathbb{N}$
➢	10	:	4	=	2,5	$\in \mathbb{Q}$
➢	16	:	-2	=	-8	$\in \mathbb{Z}$

Hierarchie der Rechenoperationen

1. Klammern
2. Potenz und Wurzel
3. Multiplikation/Division
4. Addition/Subtraktion

$\left.\begin{matrix} 3. \\ 4. \end{matrix}\right\}$ Punktrechnung vor Strichrechnung

Beispiel: $2+3\cdot(2+4)^2=0$

1. Klammer $2+4=6 \quad \Rightarrow \quad 2+3\cdot 6^2$

2. Potenz $6^2=36 \quad \Rightarrow \quad 2+3\cdot 36$

3. Multiplizieren $3\cdot 36=108 \Rightarrow \quad 2+108$

4. Addieren $2+108=110$

5. Ergebnis $\underline{\underline{110}}$

Rechenregeln

1. Assoziativgesetz (*Verknüpfungsgesetz*) für **Addition**: (m + n) + k = m + (n + k)

(44 + 28) + 16

72 + 16

= 88

Anwendung des Assoziativgesetzes

(44 + 16) + 28 → Vorteil: 40 + 10 = 50 und 4 + 6 = 10 →60

60 + 28

= 88

Bei der Addition von rationalen Zahlen dürfen die Summanden beliebig zusammengefasst (verbunden) werden, ohne dass sich der Wert des Ergebnisses ändert.

Assoziativgesetz (*Verknüpfungsgesetz*) für **Multiplikation**: (m • n)• k = m • (n • k)

(3 • 2) • 5

6 • 5

= 30

Anwendung des Assoziativgesetzes

(2 • 5) • 3 → Vorteil

10 • 3

= 30

Bei der Multiplikation von rationalen Zahlen dürfen die einzelnen Faktoren beliebig zusammengefasst (verbunden) werden, ohne dass sich der Wert des Ergebnisses ändert

Rechenregeln

2. **Kommutativgesetz (*Vertauschungsgesetz*)** für Addition: m + n = n + m

$3 + 4 = 4 + 3 = 7$

Kommutativgesetz (*Vertauschungsgesetz*) für Multiplikation: m • n = n • m

$3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 = 12$

3. **Distributivgesetz** (*Verteilungsgesetz*): m • (n + k) = m • n + m • k

In einer **Summe** mit **Produkten** aus rationalen Zahlen dürfen gleiche Faktoren zusammengefasst (ausgeklammert) werden, ohne dass sich der Wert des Ergebnisses ändert.

$7 \cdot 46 + 7 \cdot 4 =$

$7 \cdot (46 + 4) =$

$7 \cdot 50 = \underline{350}$

$25 \cdot 4 + 5 \cdot 4 =$

$(25 + 5) \cdot 4 =$

$4 \cdot 30 = \underline{120}$

$7 \cdot (46 + 4) =$

$7 \cdot 46 + 7 \cdot 4 =$

$7 \cdot 50 = 350$

$(25 + 5) \cdot 4 =$

$25 \cdot 4 + 5 \cdot 4 =$

$4 \cdot 30 = \underline{120}$

Brüche

Ein Bruch besteht aus einem Zähler, einem Nenner und einem Bruchstrich.

$$Bruch: \frac{Zähler}{Nenner}$$

$$\text{bei einem Bruch } \frac{p}{q} \text{ heißt } p \text{ \underline{Zähler} und } q \text{ \underline{Nenner}.}$$

Der Bruchstrich steht dabei für eine Division. Auch wenn für ***p*** und ***q*** grundsätzlich beliebige reelle Zahlen eingesetzt werden dürfen, ist es üblich, in Brüchen ganze Zahlen zu verwenden, also $p,q \in \mathbb{Z}$.
Immer gilt, dass der Nenner $q \neq 0$ sein muss, da durch ***0*** nicht geteilt werden darf!

Brüche, die eine 1 im Zähler haben, werden **Stammbrüche** genannt.

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1000}.$$

Echte Brüche: der Betrag des Zählers ist kleiner als der Betrag des Nenners, d.h. der Betrag des gesamten Bruches ist kleiner als **1** .

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{10}, \frac{2}{3}, \frac{256}{755}.$$

Bei **unechten** Brüchen ist der Zähler größer als der Nenner.

$$\frac{9}{7}, \frac{4}{3}, \frac{14}{10}, \frac{7}{3}, \frac{56}{35}.$$

Gemischte Brüche (auch gemischte Zahlen genannt) bestehen aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch:

$$4\frac{3}{4}, 7\frac{5}{8}, 1\frac{5}{10}, 9\frac{2}{3}, 11\frac{256}{755}.$$

Brüche

Ein **gemischte Zahlen lässt sich in einen Bruch umrechnen**, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliziert und zum Zähler addiert, den Nenner behält man bei.

$$4\frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{19}{4}$$

Gleichnamige Brüche: Brüche, die den gleichen Nenner haben, heißen gleichnamig.
Der entsprechende Nenner heißt **Hauptnenner** der Brüche

$$\frac{2}{5} \quad und \quad \frac{4}{5}$$

Hauptnenner

Ungleichnamige Brüche: Brüche, die nicht den gleichen Nenner haben, heißen ungleichnamig.

$$\frac{2}{6} \quad und \quad \frac{3}{7}$$

Teilt man den Zähler eines Bruches durch seinen Nenner, erhält man eine **Dezimalzahl**.

$$\frac{5}{4} = 5:4 = 1{,}25$$

Rechenregeln für Brüche

Erweitern

Zwei Brüche werden erweitert, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

$$\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}$$

Kürzen

Zwei Brüche werden gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert. Der Wert des Bruches ändert sich dabei nicht.

$$\frac{10}{12}=\frac{10:2}{12:2}=\frac{5}{6}$$

Addition

Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man die Zähler addiert und den Nenner unverändert lässt.

$$\frac{4}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4+2}{7}=\frac{6}{7}$$

Ungleichnamige Brüche werden addiert, indem man sie gleichnamig macht (z.B. durch Erweitern) und dann addiert.

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}+\frac{2\cdot 6}{5\cdot 6}=\frac{5}{30}+\frac{12}{30}=\frac{5+12}{30}=\frac{17}{30}$$

Subtraktion

Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man die Zähler subtrahiert und den Nenner unverändert lässt.

$$\frac{6}{7}-\frac{3}{7}=\frac{6-3}{7}=\frac{3}{7}$$

Ungleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann subtrahiert.

$$\frac{2}{5}-\frac{1}{6}=\frac{2\cdot 6}{5\cdot 6}-\frac{1\cdot 5}{6\cdot 5}=\frac{12}{30}-\frac{5}{30}=\frac{12-5}{30}=\frac{7}{30}$$

Man kann nur gleichnamige Brüche Addieren oder Subtrahieren.

Rechenregeln für Brüche

Multiplikation

Brüche werden multipliziert, indem man jeweils die Zähler und die Nenner multipliziert.

$$\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4\cdot 2}{7\cdot 5}=\frac{8}{35}$$

Division

Zwei Brüche werden dividiert, indem man mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert.

$$\frac{4}{7}:\frac{2}{5}=\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{2}=\frac{4\cdot 5}{7\cdot 2}=\frac{20}{14}$$

Doppelbrüche

Produkt aus *Zähler* des 1. und *Nenner* des 2. Bruches → Z. des neuen Bruches
Produkt aus *Nenner* des 1. und *Zähler* des 2. Bruches → N. des neuen Bruches

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\quad denn\quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Hinweise

- Ist das Ergebnis einer Bruchrechnungsaufgabe ein Bruch, sollte dieser so weit wie möglich gekürzt werden.
- **ACHTUNG**: Aus Summen darf man nicht kürzen! → *Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen*

"über Kreuz" Kürzen

Die Multiplikation mit dem Kehrwert wird einfacher wenn man vor der Multiplikation "über Kreuz" kürzen kann, d.h. kürze **"*den ersten Zähler mit dem zweiten Nenner*"** sowie **"*den ersten Nenner mit dem zweiten Zähler*"**

Hat man vor dem Ausrechnen schon alles so weit wie möglich gekürzt, dann lässt sich das Ergebnis **nicht** mehr weiter kürzen. Eine kurze Prüfung schadet aber natürlich auch nichts :-)

:4 :7

$$\frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{14}_{7}}:\frac{8}{21}=\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{7}_{1}}\cdot\frac{\cancel{21}^{3}}{\cancel{8}_{2}}=\frac{3\cdot 3}{1\cdot 2}=\frac{9}{2}$$

Klammerrechnen

Ausklammern (Faktorisieren)

- ist das Gegenteil vom Klammern auflösen
- Ziel ist es Ausdrücke zu vereinfachen / kürzer zu schreiben
- Erzeugen eines Produktes

Beispiel $10x + 5$

1. Gemeinsame Faktoren suchen
   $10 = 5 \bullet 2$ → in jedem Summanden kommt die **5** vor
2. Den gemeinsamen Faktor (hier: **5**) vor die Klammer schreiben
   $5(\ldots)$
3. Durch den gemeinsamen Faktor (hier: **5**) teilen
   $10x : 5 + 5 : 5 = 2x + 1$
4. Der Term wird in die Klammer geschrieben
   $5(2x + 1)$

→ zwischen dem Faktor und der Klammer steht eigentlich ein "•"

Mehrere Faktoren gleichzeitig ausklammern:

Beispiel $18x^2 + 21x – 12x^2 + 3x$

1. Gemeinsame Faktoren suchen
   in jedem Summanden kommt die eine durch **3** teilbare Zahl und min. ein **x** vor
2. Den gemeinsamen Faktor (hier: **3x**) vor die Klammer schreiben
   $3x(\ldots)$
3. Durch den gemeinsamen Faktor (hier: **3x**) teilen
   $18x^2 : 3x + 21x : 3x - 12x^2 : 3x + 3x : 3x = 6x + 7 – 4x + 1$
4. Der Term wird in die Klammer geschrieben
   $3x\,(6x + 7 – 4x + 1)$

→ Wichtig: die 1 am Ende nicht vergessen und den Term sauber durch den Vorfaktor teilen

Klammerrechnen

Klammer mal Faktor
(siehe Distributivgesetz)

Wir multiplizieren jeden Summanden in der Klammer mit dem Faktor vor der Klammer.

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}a+\frac{8}{9}b\right)=\frac{3\cdot 1}{4\cdot 3}a+\frac{3\cdot 8}{4\cdot 9}b=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1}a+\frac{1}{1}\cdot\frac{2}{3}b=\frac{1}{4}a+\frac{2}{3}b$$

Beispiel: 5x – 2 (8x – 2) = 5x – 16x + 4 = – 11x + 4

Klammer mal Klammer
Wir müssen jeden Summanden aus der ersten Klammer mit jedem Summanden aus der zweiten Klammer multiplizieren.

Beispiel: (5x – 2) (8x – 2) = 5x · 8x + 5x · (– 2) + (– 2) · 8x + (– 2) · (– 2) = 40x² – 10x – 16x + 4

Plus vor der Klammer

Stellen wir uns einfach vor, dass vor der Klammer der Faktor 1 steht und lösen das auf wie Klammer mal Faktor.
→ Klammer kann also einfach weggelassen werden!

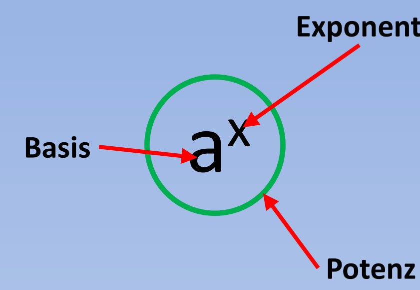
Beispiel: 5x + (8x – 2) = 5x + 1 · (8x – 2) = 5x + 1 · 8x – 1 · 2 = 5x + 8x – 2

Minus vor der Klammer

Stellen wir uns einfach vor, dass vor der Klammer der Faktor 1 steht und lösen das auf wie Klammer mal Faktor.
→Klammer weglassen und die Vorzeichen in der Klammer umdrehen!

Beispiel: 5x – (8x – 2) = 5x – 1 · (8x – 2) = 5x + (– 1) (8x – 2) = 5x + (–1) · 8x + (– 1) (– 2) = 5x – 8x + 2

Potenzrechnung



Definitionen

Bezeichnung Exponent = **n** (…ist eine natürliche Zahl)
Bezeichnung Basis (Zahl) = **a**

$a^0 = 1$	$a^1 = 1$
$1^0 = 1$	$1^1 = 1$
$2^0 = 1$	$2^1 = 2$
$3^0 = 1$	$3^1 = 3$
$4^0 = 1$	$4^1 = 4$

…, aber $\mathbf{0^0}$ wird unterschiedlich behandelt
(1 oder nicht definiert)

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n – mal multiplizieren}}$$

$$a^2 = \underbrace{a \cdot a}_{\text{2–mal multiplizieren}}$$

$$a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_{\text{3–mal multiplizieren}}$$

$$a^4 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{4–mal multiplizieren}}$$

$$a^5 = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5–mal multiplizieren}}$$

Beispiele

$2^2 = 2 \cdot 2 = +4$

$-2^2 = (-2) \cdot (-2) = +4$

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = +8$

$-2^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

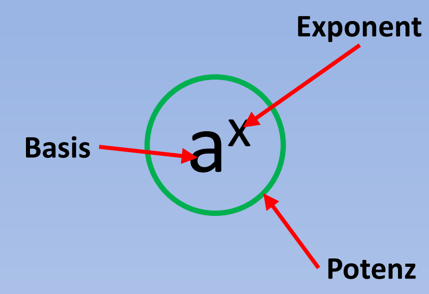
$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

$(-a)^n$ = Wenn ***n*** gerade ist, ist das Ergebnis Positiv

$(-\,a)^{n+1}$ = Wenn ***n*** **un**gerade ist, ist das Ergebnis Negativ

Potenzrechnung



Negative Exponenten

Die Null ist auszuschließen, da die Division durch Null nicht definiert ist.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{-0} = \frac{1}{a^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a \cdot a}$$

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a}$$

$$2^{-0} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

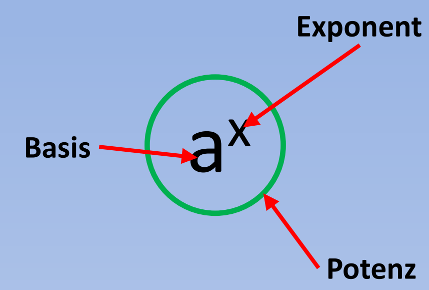
$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

Rationale Exponenten

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{4^3} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$$

Potenzgesetze



Addition und Subtraktion

Potenzen mit gleicher Basis und gleichem Exponenten können addiert oder subtrahiert werden.

$3x^4 - 5x^2 + 6x^4 + 3x^2 = 9x^4\ 2x^2$

$-x^2 - 2\,(x^4 + x^2) + 2 = -2x^4 - 3x^2 + 2$

Multiplikation

Potenzen mit **gleicher Basis** werden multipliziert, indem man ihre Exponenten addiert und die Basis beibehält.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad a \in R; \qquad m, n \in N^*$$

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5$$
$$e^3 \cdot e^x = e^{3+x} = e^{x+3}$$

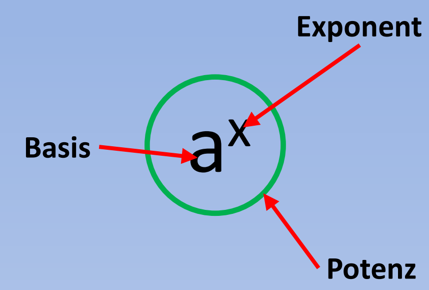
Potenzen mit **ungleicher Basis** aber gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man ihre Basen multipliziert und den Exponenten beibehält.

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad a, b \in R; \qquad n \in N^*$$

$$12^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \left(12 \cdot \frac{1}{4}\right)^3 = 3^3 = 27$$

$$(x+1)^2 (x-1)^2 = [(x+1)(x-1)]^2 = \left(x^2 - 1\right)^2$$

Potenzgesetze



Division

Potenzen mit **gleicher Basis** werden dividiert, indem man den Nennerexponenten vom Zählerexponenten subtrahiert und die Basis beibehält.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad a \in R; \qquad m, n \in N \wedge m > n$$

Untersuchung für die Fälle, dass m=n und m<n:

$$\text{Fall } m = n: \quad \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 \quad \Rightarrow \quad a^0 := 1$$

$$\text{Fall } m < n \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (m-n) \in \mathbb{Z}^*_-$$

Setzt man eine Potenz vom Zähler in den Nenner oder umgekehrt, so ändert sich das Vorzeichen des Exponenten.

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Erweiterung:

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \quad \wedge \quad a^0 = 1 \wedge a^{-n} = \frac{1}{a^n} \wedge a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

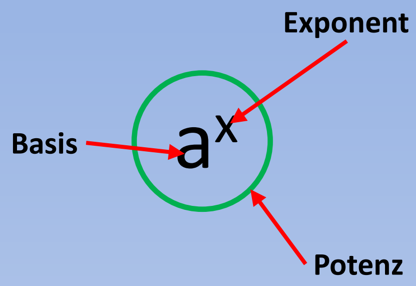
$$a \in R; \qquad n \in Z \quad a^n \in R$$

Beispiele:

$$\frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 \qquad \frac{x^7}{x^7} = x^{7-7} = x^0 = 1$$

$$\frac{e^5}{e^7} = e^{5-7} = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \qquad \frac{x^{n-1}}{x^n} = x^{n-1-n} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Potenzgesetze



Division

Potenzen mit **ungleicher Basis** aber **gleichem Exponenten** werden dividiert, indem man ihre Basen dividiert und den Exponenten beibehält.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \qquad a, b \in R; \qquad n \in N$$

Beispiele:

$$\frac{25^3}{5^3} = \left(\frac{25}{5}\right)^3 = 5^3 = 125$$

$$\frac{(u^2-1)^2}{(u+1)^2} = \left[\frac{(u^2-1)}{u+1}\right]^2 = \left[\frac{(u-1)(u+1)}{(u+1)}\right]^2 = (u-1)^2$$

Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Beispiele:

$$(4^3)^2 = 4^{3 \cdot 2} = 4^6$$

$$(x^{n-2})^3 = x^{(n-2) \cdot 3} = x^{3n-6}$$